

Analiza cinematica a mecanismelor cu roți

1. Generalitati. Definiții
2. Mecanisme cu elemente dințate. Angrenaje cilindrice si conice
3. Trenuri de roți dințate ordinare
4. Trenuri de roți dințate cicloidale
5. Analiza cinematică a mecanismelor cu elemente de frecare

1. Generalități

Mecanismele cu roți (de fricțiune sau dințate) servesc transmiterii și/sau transformării mișcării de rotație. Acest tip de mecanisme este foarte răspândit din cauza faptului că majoritatea motoarelor (surselor de energie mecanică) sunt rotative, iar mișcarea produsă de acestea, de multe ori, trebuie adaptată (după caz, crescută turația sau puterea).

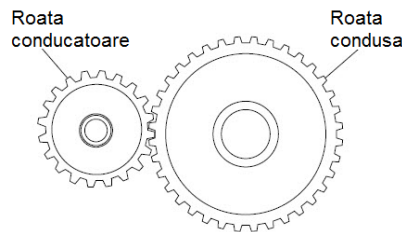


Fig.1 Transmisie cu roți dințate

De exemplu, un motor produce o mișcare rotativă cu viteza unghiulară $\omega_i = 100 \frac{rad}{s}$, dar elementul de execuție (elementul condus/de ieșire) trebuie să aibă o viteză unghiulară de $\omega_e = 200 \frac{rad}{s}$. În acest caz se poate folosi o transmisie cu roți dințate, multiplicatoare, dezavantajul care apare odată cu folosirea unei transmisii fiind scăderea cuplului transmis, direct proporțional cu factorul de creștere al vitezei unghiulare/turației (în cazul de față, la elementul de ieșire, turația se dublează dar cuplul se înjumătățește). Acest fenomen funcționează și în sens invers, dacă elementul condus are viteză unghiulară/turație mai mică decât elementul motor, cuplul transmis de la elementul motor la elementul condus va fi amplificat. Prin **transmisie** se înțelege un mecanism cu cel puțin două roți în angrenare.

Astfel apare un parametru cinematic adimensional numit **raport de transmitere**, definit ca raportul dintre viteza unghiulară a elementului "i" de intrare (conducător sau motor) și viteza unghiulară a elementului „e” de ieșire (condus). Raportul de transmitere se notează cu i (a nu se confunda cu notarea i pentru elementul de intrare) și se exprimă prin relația (1).

$$i_{ie} = \frac{\omega_i}{\omega_e} \quad (1)$$

Într-un lanț cinematic dat, având atribuite numere de ordine pentru fiecare element, indexarea se face în concordanță cu numerotarea respectivă.

Din relația (1) se observă că dacă

$$|i_{ie}| > 1 - \text{transmisia este reductoare } \omega_e < \omega_i$$

$$|i_{ie}| < 1 - \text{transmisia este amplificatoare/multiplicatoare } \omega_e > \omega_i$$

Raportul de transmitere poate fi **constant** (Fig.1), dacă se menține în timp factorul de amplificare între viteza elementului de intrare și ieșire, sau variabil, dacă acest factor se modifică în timp.

Raportul de transmitere poate fi **variabil**

- ciclic, pe perioada unui ciclu de funcționare – în cazul transmisiilor cu roți dințate necirculare – Fig.2a
- comandat, dacă se intervine din exterior – în cazul variatoarelor Fig.2b și a cutiilor de viteză Fig.2c

La cutiile de viteză raportul de transmitere se modifică în trepte, iar la variatoare raportul de transmitere poate lua orice valoare într-un interval dat.

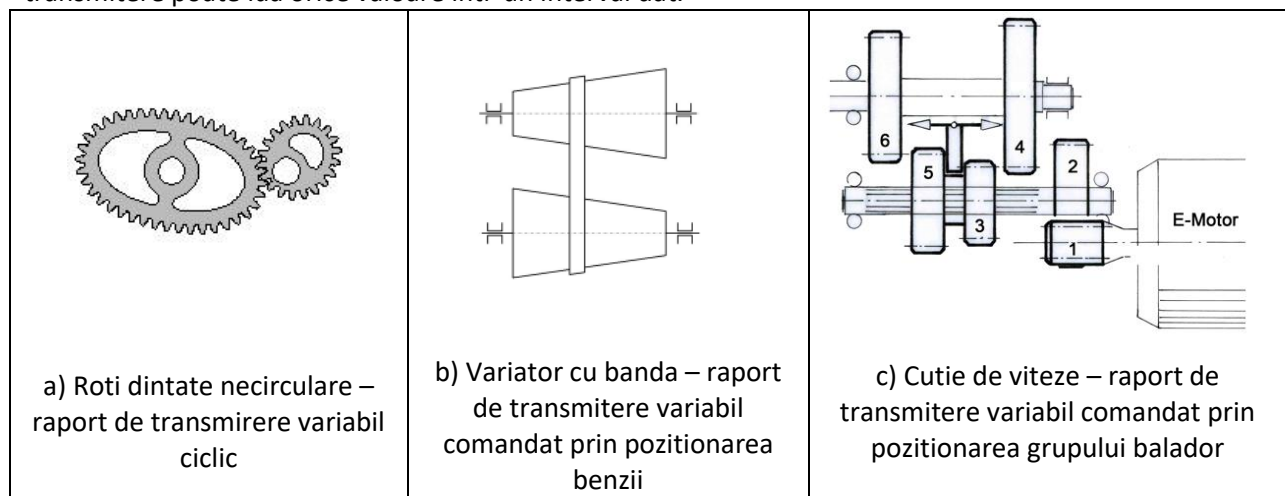


Fig. 2 Transmisii cu raport de transmitere variabil

Se numește **treaptă de transmisie** sau **angrenaj** o pereche de două roți care intră în angrenare. Se recomandă ca raportul de transmitere pentru o treaptă să fie cuprins între limitele $6.3 - 1/6.3$, maxim $10 - 1/10$. Pentru a se obține valori mai mici sau mai mari pentru raportul de transmitere se pot cupla (insera) mai multe trepte de transmitere, obținând astfel un **tren** de roți dințate sau de fricțiune.

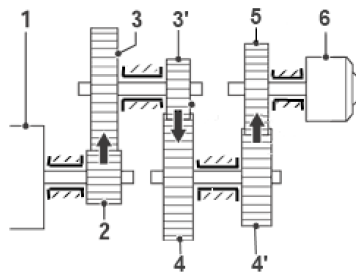


Fig 3 Tren de roți dințate

Pentru exemplificare, în Fig 3 este reprezentat un tren de roți dințate care face legătura între elementul 1 motor și elementul 6 condus. Se pot observa 3 trepte în această transmisie, prima treaptă formată din perechea de roți 2-3, a doua 3'-4 și a treia 4'-5.

Pozițiile relative ale axelor de rotație ale unei perechi de roți coincid cu posibilitățile de așezare a două drepte, adică: paralele, concurente sau oarecare.

Transmiterea mișcării de rotație între axe paralele se face prin intermediul transmisiilor cilindrice, între axe concurente prin transmisi conice, iar între axe oarecare prin transmisi hiperboloidale (încrucișate).

La nivelul unei perechi de roți, transmiterea mișcării de rotație se poate face prin contact direct sau prin intermediul unui element flexibil intermediar. Transferul energetic (prin intermediul forțelor) între cele două roți ale unei trepte se poate face prin formă/angrenare (transmisii cu roți dințate, cu lanțuri și curele dințate), respectiv prin foță (transmisii prin frecare).

O discuție cu privire la modul de obținere a formei roților dințate este prezentată în Anexa 1 - Axiile mișcării relative. Aici se demonstrează că forma geometrică a două elemente aflate în contact și ce trebuie să transmită mișcarea de rotație este funcție de poziția axelor de rotație:

- axe oarecare - hiperboloid cu o pânză
- axe concurente – con
- axe paralele – cilindru

Astfel pozițiile relative a axelor de rotație produc angrenaje cilindrice sau conice

2. Mecanisme cu elemente dințate. Angrenaje cilindrice si conice

Așa cum s-a spus mai sus, mișcarea de rotație poate fi transmisă prin forță (roți de fricțiune) sau prin formă/angrenare (roți dințate, roți de lanț sau curele cu dinți). În continuare se va discuta despre cazul transmisiilor cu roți dințate. Pentru acestea, transmiterea mișcării se realizează prin intermediul forme suprafeței pe care o au roțile care intră în contact. Suprafața în contact poate fi exterioară sau interioară (Fig.9) și prezintă o succesiune de proeminente (dinți) și cavități (goluri) (Fig.8a) prin intermediul cărora se asigură transmiterea mișcării (prin formă) de la o roată la alta (Fig. 8b), astfel realizându-se o cuplă cinematică de clasa a IV-a superioară. Modul standardizat de reprezentare în schema cinematică a unei roți dințate este prezentat în Fig. 9, utilizând linie punctată pentru simbolizarea coroanei dințate în vedere frontală. În Fig. 9a se prezintă o vedere frontală și una laterală asupra schemei cinemate pentru un angrenaj cilindric exterior.

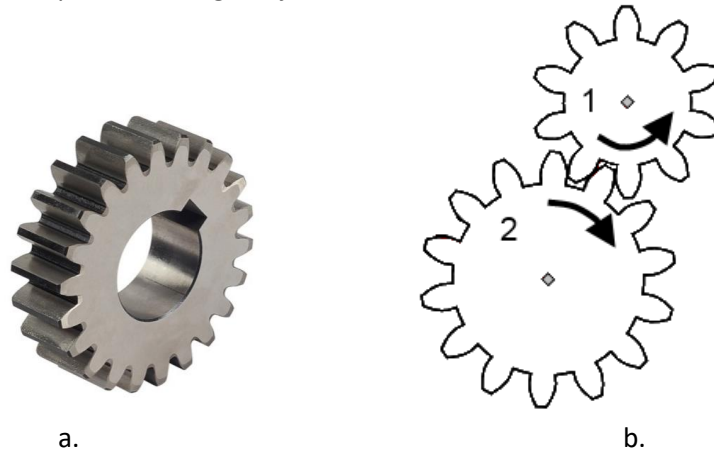


Fig.8 Roți dințate a. imagine a unei roți dințate, b. două roți dințate în angrenare

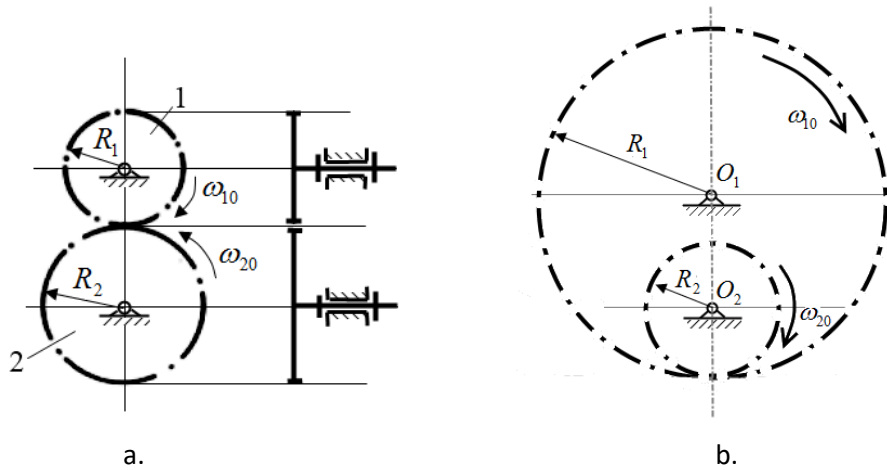


Fig.9 Schema cinematică a unui angrenaj a. cilindric exterior b. cilindric interior

Din Fig.9 se observă că viteza periferică a celor două roți în punctul de contact trebuie să fie egală (dacă nu ar fi egale cele două viteze roțile ar aluneca una față de cealaltă, lucru imposibil din cauza dinților), ca urmare se poate scrie relația:

$$v = R_1 \omega_{10} = \pm R_2 \omega_{20} \quad (2)$$

semnul minus fiind justificat în situația roților cilindrice exterioare, când se schimbă sensul vitezei unghiulare

Relația (2) poate fi rescrisă astfel:

$$v = \frac{\omega_{10}}{\omega_{20}} = \pm \frac{R_2}{R_1} \quad (3)$$

dar $\frac{\omega_{10}}{\omega_{20}} = i_{12}$ de unde se poate scrie relația de definiție a raportului de transmitere:

$$i_{12} = \frac{\omega_{10}}{\omega_{20}} = \pm \frac{R_2}{R_1} \quad (4)$$

În mișcare, danturile celor două roți dințate în angrenare asigură parcurgerea unor arce egale, astfel, distanța măsurată pe arc între cele două profile consecutive de același fel (omoloage) poartă denumirea de **pas**.

Rezultă astfel condiția necesară pentru realizarea transmiterii prin formă a mișcării de rotație, anume, ca danturile celor două roți în angrenare să aibă același pas (pe cercurile de rostogolire).

Pasul ar reprezenta, în acesteste condiții, parametrul după care s-ar standardiza roțile dințate. Datorită faptului că acesta rezultă un număr irațional, din condiția:

$$2\pi R = zp \quad (5)$$

(R-raza roții, z-număr de dinți, p-lungimea pasului), uzual se standardizează mărimea

$$m = \frac{p}{\pi} \quad \text{care poartă denumirea de } \mathbf{modul}.$$

Deci condiția necesară a angrenării devine egalitatea modulelor celor două roți dințate.

Dacă se pornește de la relațiile (4) și (5), în cazul unui angrenaj cilindric exterior, se pot scrie următoarele relații:

$$i_{12} = \frac{\omega_{10}}{\omega_{20}} = -\frac{R_2}{R_1} = -\frac{2\pi R_2}{2\pi R_1} = -\frac{z_2 p}{z_1 p} = -\frac{z_2}{z_1} \quad (6)$$

Pentru un angrenaj cilindric interior se poate scrie relația:

$$i_{12} = \frac{\omega_{10}}{\omega_{20}} = \frac{R_2}{R_1} = \frac{z_2}{z_1} \quad (7)$$

Semnul minus apare în relația (6) în cazul roților cilindrice cu contact exterior datorită faptului că sensul de rotație al roții conduse este opus sensului de rotație al roții conducătoare (vezi Fig.9a)

Relația (6) și (7) face legătura între raportul de transmitere și numărul de dinți pentru cele două roți dințate. Aceasta este valabilă și în cazul angrenajelor cu roți hiperboloidale sau conice Fig.10, forma generală a raportului de transmitere fiind următoarea:

$$i_{12} = \pm \frac{z_2}{z_1} \quad (8)$$

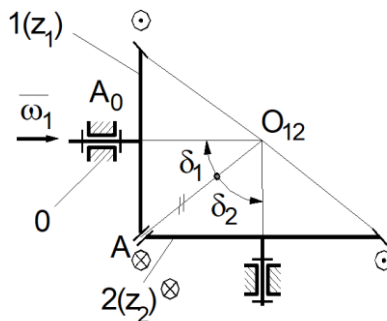
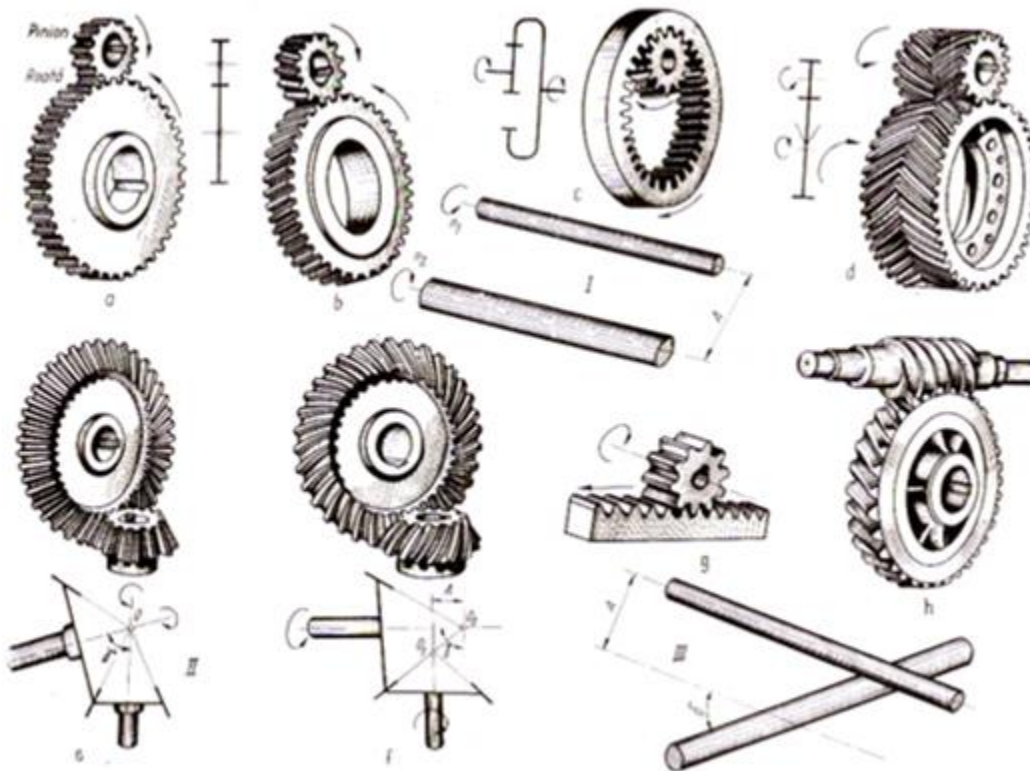


Fig. 10 Angrenaj conic [wikipedia]

Clasificarea angrenajelor

<p>1.dupa pozitia relativa a arborilor:</p> <ul style="list-style-type: none"> - cu arbori paraleli (a,b,c,d) - cu arbori concurenti (e,f) - cu arbori neconcurenti (g,h) <p>2.dupa forma roților:</p> <ul style="list-style-type: none"> - Cilindrice (a,b,c) - Conice (e) - Hiperboloidale (d,f) - Melcate (h) - Cremalieră (g) - necirculare (Fig.2a) 	<p>3. După orientarea dinților</p> <ul style="list-style-type: none"> - Drepti (a,c,e,g) - Înclinați (b) - Curbi (f,h) - În V (d) <p>3.dupa tipul angrenarii:</p> <ul style="list-style-type: none"> -exterioara (a,b,d,e,f,g,h) -interioara (c) <p>4.dupa specificul miscarii:</p> <ul style="list-style-type: none"> -fara transformarea miscarii de rotatie -cu transformarea miscarii de rotatie in miscare de translatie si invers (g)
---	---



3. Trenuri/transmisii cu roți dințate ordinare

Se dorește determinarea stării de mișcare (de obicei viteză) a roții conduse în funcție de starea de mișcare a roții conducătoare.

Trenurile/transmisiiile cu roți dințate se impart în două categorii:

- ordinare – dacă toate axele roților au poziții fixe în spațiu: Fig.9, Fig.10, Fig.11
- cicloidale – dacă cel puțin o roată nu are axa fixă (are o axă mobilă)

3.1 Trenuri de roți dințate cilindrice ordinare

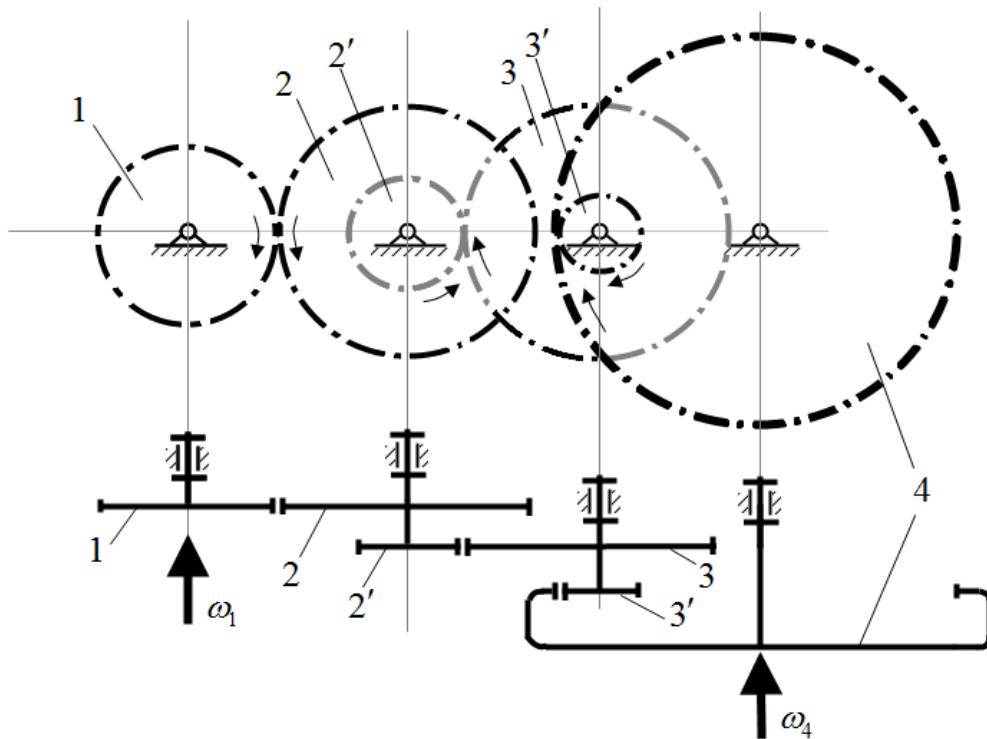


Fig.11 Tren de roți dințate ordinare

În Fig.11 se prezintă un tren de roți dințate ordinar format din 3 trepte de angrenare. Se subliniază faptul că roțile 2-2' aparțin elementului 2 și au aceeași viteză unghiulară (analog și pentru 3-3'). De asemenea se observă că între roțile 1-2 și 2'-3 există un contact exterior care schimbă sensul de rotație al elementelor conduse față de cele conducătoare iar între roțile 3'-4 există un contact interior care are ca efect păstrarea sensului de rotație dintre elementul condus și conducător.

Se scrie raportul de transmitere:

$$i_{14} = \frac{\omega_1}{\omega_4} = \frac{\omega_1}{\omega_2} \frac{\omega_2}{\omega_3} \frac{\omega_3}{\omega_4} = \left(-\frac{z_2}{z_1} \right) \left(-\frac{z_3}{z_{2'}} \right) \left(\frac{z_4}{z_{3'}} \right) \quad (21)$$

Generalizând relația (21) se obține:

$$i_{1n} = \frac{\omega_1}{\omega_n} = (-1)^k \frac{z_2 z_3 z_4 \dots z_n}{z_1 z_2' z_3' \dots z_{n-1}'} \quad (22)$$

se notează cu k numărul angrenajelor exterioare din tren/transmisie

În funcție de valoarea pe care o are raportul de transmitere i_{1n} , trenurile de roți dințate pot fi:

- **reductoare** de turație (sau simplu “reductoare”), dacă $i_{1n} > 1$
- **amplificatoare** de turație, dacă $i_{1n} < 1$

3.2 Trenuri ordinare de roți dințate conice

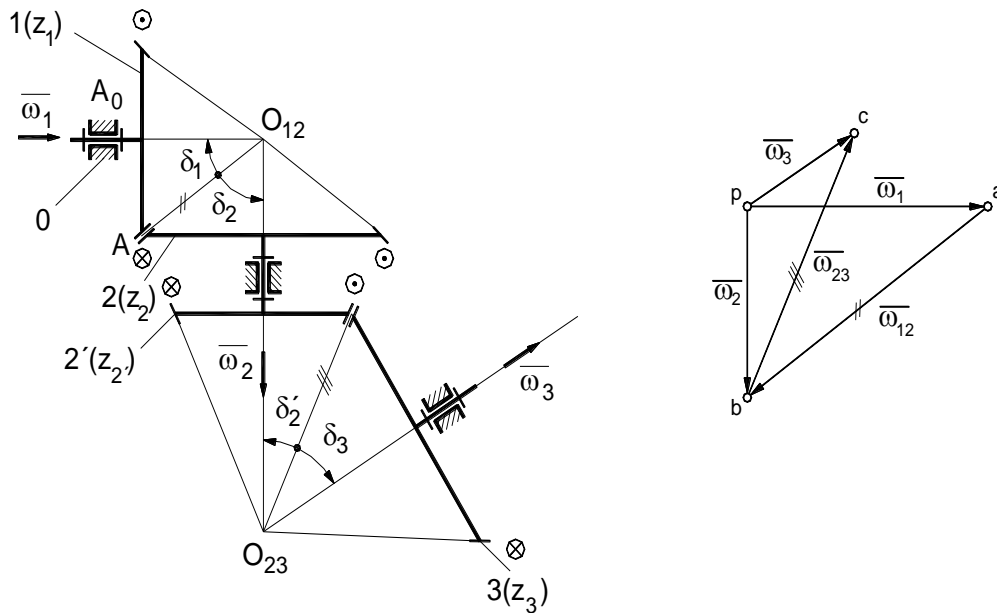


Fig. 12 Tren ordinar de roți dințate conice

Pentru cazul roților dințate conice există o categorie suplimentară de marimi ce pot determina raportul de transmitere, anume unghiurile pe care le formează axele celor două roți dințate conice în angrenare. Astfel se pot scrie relațiile următoare:

$$i_{12} = \frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{\sin \delta_2}{\sin \delta_1} \quad \delta_1 + \delta_2 = \Sigma = 90^\circ \quad i_{12} = \frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{\sin \delta_2}{\sin(90 - \delta_2)}$$

În final, relația de calcul a raportului de transmitere pentru un angrenaj ce conține roți dințate conice este similară celei de calcul pentru roți dințate cilindrice și are forma (22'):

$$i_{13} = \frac{\omega_1}{\omega_3} = i_{12} \cdot i_{23} = \frac{\sin \delta_2}{\sin \delta_1} \cdot \frac{\sin \delta_3}{\sin \delta_2'} = \frac{R_2}{R_1} \cdot \frac{R_3}{R_2'} = \frac{z_2}{z_1} \cdot \frac{z_3}{z_2'} \quad (22')$$

Trenurile de roți dințate pot fi alcătuite inclusive prin combinarea angrenajelor cilindrice sau conice.

3.3 Transmisii cu roți dințate melcate

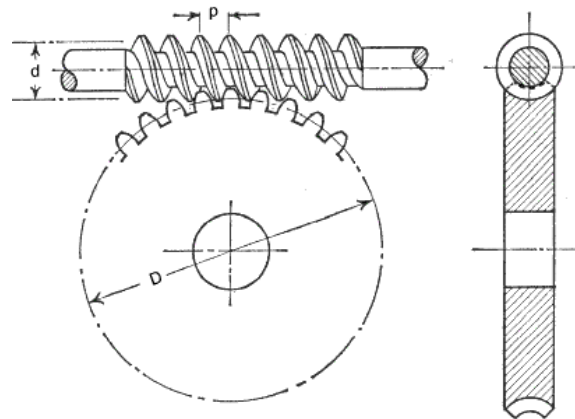


Fig.22 Angrenaj melc-roatămelcată

Pentru mecanismul din Fig.22, unghiul dintre axe este de 90° , iar una dintre roți, cea conducătoare în general, are un număr foarte mic de dinți (1..4), degenerând într-un șurub (numit melc). Și în acest caz, raportul de transmitere este:

$$i_{12} = \pm \frac{z_2}{z_1}$$

În general, la acest tip de mecanism mișcarea se transmite de la melc la roata melcată, transmiterea în sens invers fiind nefavorabilă din cauza unghiului de presiune mare care apare între roată și melc. Dacă se consideră roata având 30 de dinți, și melcul un dinte (șurubul - un început), raportul de transmitere rezultat este 30.

3.4 Transmisie roată dințată - cremalieră

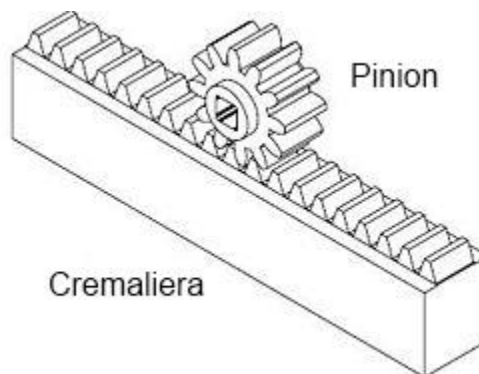


Fig.23 Pinion-Cremalieră

Mecanismul din Fig.23, servește la transformarea mișcării de rotație într-o mișcare de translație și viceversa. Raportul de transmitere depinde de pasul danturii.

4. Trenuri de roți dințate cicloidale

1. Analiza structurala
2. Analiza cinematica

4.1a Analiza structurala a transmisiilor planetare cu roți dințate

Transmisiile planetare cu roți dințate sunt folosite la obținerea unor rapoarte de transmitere foarte mari sau foarte mici utilizând un număr relativ mic de roți dințate, mecanismele fiind relativ compacte (ocupă un volum mic) Fig.14

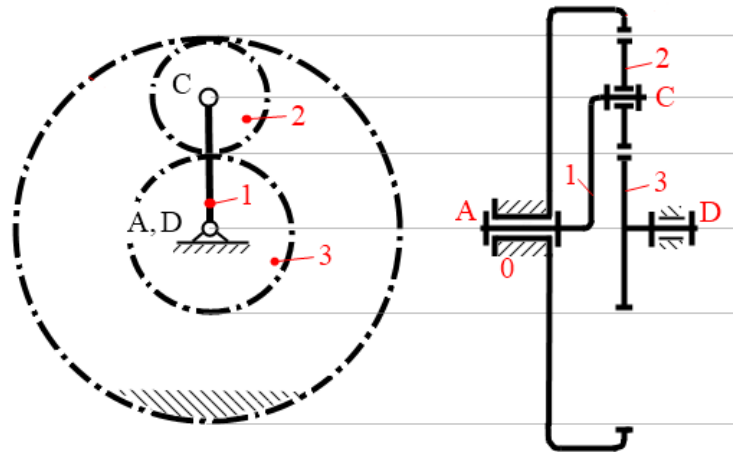


Fig.14 Transmisie planetară cu roți dințate

Un mecanism planetar este compus din următoarele elemente:

1. braț port-satelit
2. roată satelit
0. coroana mecanismului cicloidal - fixată
3. roata centrală (solara)

Pentru mecanismul din Fig.14 se calculează gradul de mobilitate:

- numărul de elemente $n = 4$
- numărul de cuple de clasa a 5-a $c_5 = 3$
- numărul de cuple de clasa a 4-a $c_4 = 2$
- gradul de mobilitate

$$M = 3(n - 1) - c_4 - 2c_5$$

$$M = 1$$

În mod uzual se fixează roata centrală, dar se pot fixa oricare din elementele care compun mecanismul planetar.

În general, o transmisie cicloidală este alcătuită din una sau mai multe roți centrale sau solare având axele fixe în spațiu, una sau mai multe roți cu axă mobilă, numite satelit (sau roți planetare) și un braț port-satelit care asigură poziția reciprocă a precedentelor și mișcarea de revoluție a axei (axelor) mobile.

Pentru mecanismele prezentate în Fig.12 și Fig.14, în realitate se folosesc mai multe roți satelit pentru o transmitere mai eficientă a forțelor și scăderea uzurilor. O asemenea construcție este prezentată în Fig.15, în stânga - poziția inițială, în dreapta - roata centrală rotită aprox 180° produce o rotire a brațelor port-satelit cu aprox. 30°

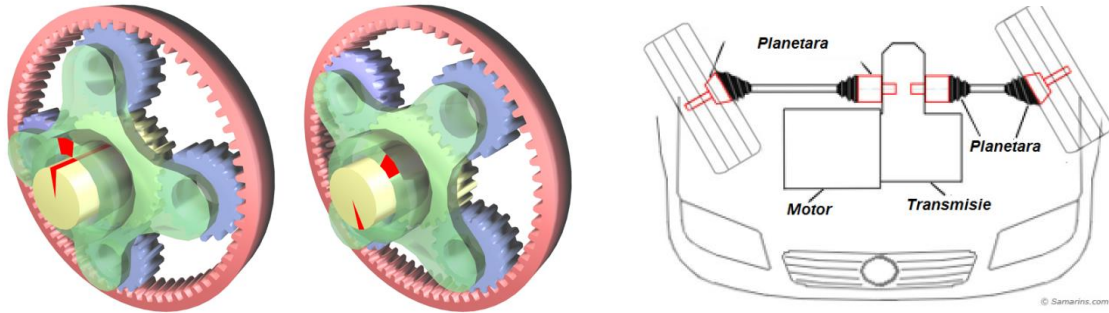


Fig.15 Mecanism planetar [wikipedia]. Mecanism planetară (a nu se confunda cu mecanismul planetar cu roți dințate)

A nu se confunda mecanismul cu roți dințate planetar (Fig.15 stanga) cu mecanismul planetară (Fig.15 dreapta) folosit la transmiterea mișcării de la transmisie la roată sub orice unghi pentru puntea motoare a unui autoturism.

4.1b Analiza structurala a transmisiilor diferențiale

Mecanismele diferențiale se utilizează la compunerea, prin sumă sau prin diferență, a două sau mai multe mișcări de rotație (de unde și denumirea de diferențial). Ele pot fi utilizate la descompunerea unei mișcări de rotație (de exemplu mișcarea produsă de un motor) în două sau mai multe componente, cum ar fi cazul diferențialului de la automobil Fig.13.

Video: Funcționarea unui mecanism diferențial <http://www.youtube.com/watch?v=F40ZBDAG8-o>

Un mecanism diferențial este compus din următoarele elemente:

1. braț port-satelit
2. roată satelit
3. coroana mecanismului cicloidal
4. roata centrală (solara)

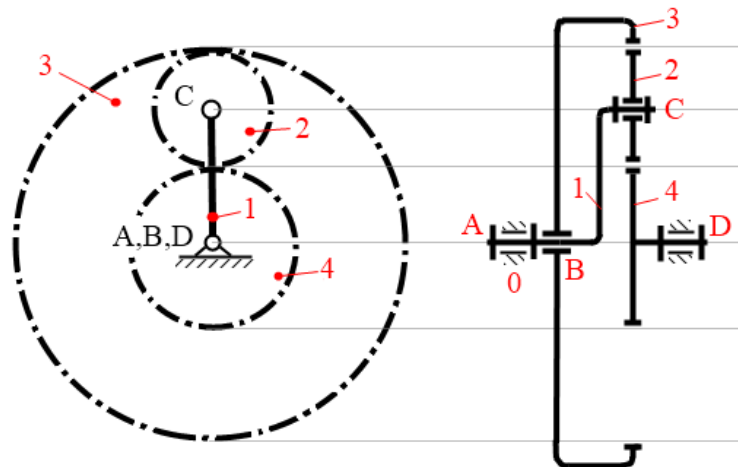


Fig.12 Mecanism diferențial

Pentru mecanismul din Fig.12 se calculează gradul de mobilitate:

- numărul de elemente $n = 5$

- numărul de cuple de clasa a 5-a $c_5 = 4$
- numărul de cuple de clasa a 4-a $c_4 = 2$
- gradul de mobilitate

$$M = 3(n - 1) - c_4 - 2c_5$$

$$M = 2$$

Având în vedere că $M = 2$ este nevoie de două elemente motoare pentru a obține o mișcare univocă, ceea ce demonstrează ideea de compunere a două mișcări prin sumă sau diferență.

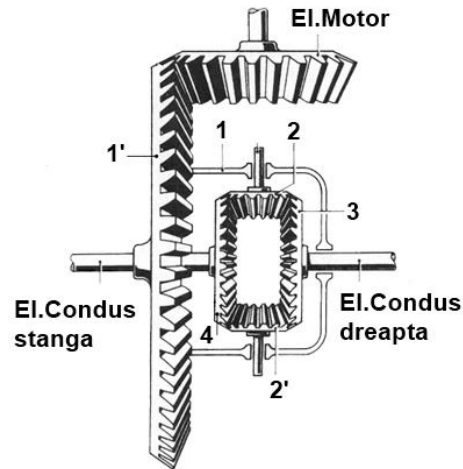


Fig. 13 Mecanism diferențial cu roți dințate conice folosit la automobil

Mecanismul diferențial prezentat în Fig.13 este antrenat de elementul motor. Acesta transmite mai de parte mișcarea la elementul 1 care este solidar cu elementul 1' – port satelit, roțile 2 și 2' fiind sateliții. Sateliții sunt în angrenare cu elementele 3 solidar cu elementul condus stânga și 4 solidar cu elementul condus dreapta, producând mișcarea acestora. Se subliniază faptul că elementul 1' se mișcă independent de elementul 4.

4.2 Analiza cinematică a trenurilor de roți dințate cicloidale

se poate face prin două metode care au ca scop determinarea raportului de transmitere și a vitezei unghiulare pentru elementele care compun mecanismul:

1. Metoda analitică – Willis, Robert (publicata în 1957)
2. Metoda grafo-analitica – Kutzbach, Karl (publicata în 1913) (prezentata in Anexa 2)

4.2a. Metoda analitică – Willis. Mecanism planetar

Calculul raportului de transmitere, respectiv a vitezei unghiulare pentru elementele ce alcătuiesc mecanismul cicloidal (planetar sau diferențial) se poate realiza prin transformarea mecanismului într-unul ordinar. Aceasta se realizează prin rotirea întregului mecanism cu o viteză unghiulară $-\omega_{port-satelit}$, obținându-se astfel staționarea aparentă a brațului port-satelit.

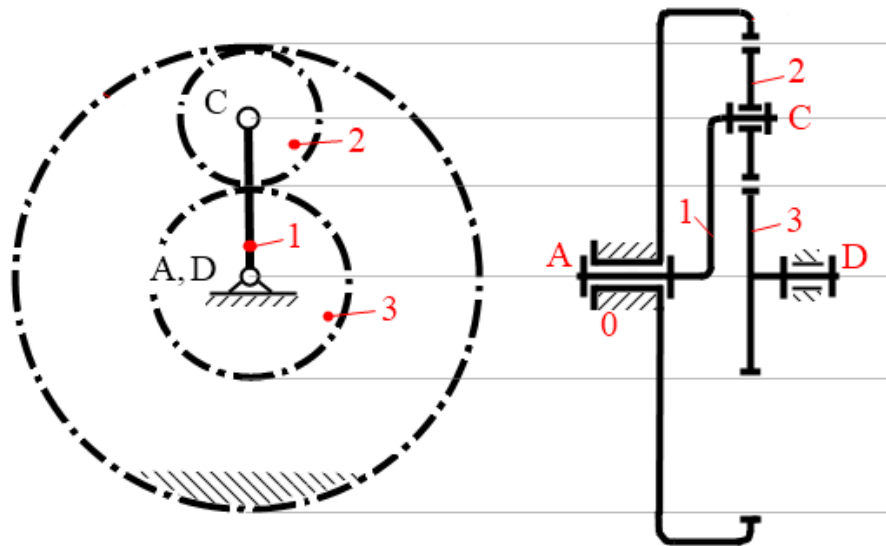


Fig.17 Transmisie planetară cu roți dințate

Pentru mecanismul planetar din Fig.17 se dorește determinarea raportului de transmitere i_{13} . Se fixează brațul port-satelit 1, prin aplicarea unei viteze unghiulare $-\omega_1$ întregului mecanism, ca rezultat, elementul 0 nu va mai fi fixat, ci va avea o viteză unghiulară egală cu $-\omega_1$. Analog, la viteza unghiulară a elementului 3 va fi adăugat $-\omega_1$. În condițiile acestea se determină raportul de transmitere de la elementul 0 la elementul 3 când elementul 1 este fixat:

$$i_{03}^{(1)} = \frac{\omega_0 - \omega_1}{\omega_3 - \omega_1} = \frac{\omega_3}{\omega_1 - 1} = \frac{i_{13}}{i_{13} - 1} \quad (23)$$

și

$$i_{03}^{(1)} = \frac{z_2}{z_0} \left(-\frac{z_3}{z_2} \right) = -\frac{z_3}{z_0} \quad (24)$$

Relația (23) reprezintă legătura dintre **raportul de transmitere real**, și cel obținut prin fixarea brațului port-satelit numit **raport de transmitere aparent**, relația (24) reprezintă raportul de transmitere al transmisiei ordinare obținută prin fixarea brațului port-satelit al transmisiei planetare.

Egalând relațiile (23) și (24) se poate determina raportul de transmitere i_{13} :

$$\frac{i_{13}}{i_{13} - 1} = -\frac{z_3}{z_0} \quad (25)$$

de unde:

$$i_{13} = \frac{z_3}{z_0 + z_3} \quad (26)$$

Dacă raportul de transmitere este pozitiv, viteza unghiulară de la ieșire are același sens cu viteza unghiulară la intrare.

4.2b. Metoda analitică – Willis. Mecanism diferencial

În Fig.18 se prezintă un mecanism diferențial. Se dorește determinarea raportului de transmitere pentru acest mecanism și a vitezei unghiulare a elementului de ieșire 4. Se fixează brațul port-satelit prin rotirea mecanismului $-\omega_2$. Având în vedere că mecanismul diferențial are gradul de mobilitate 2, se presupune cunoscute vitezele unghiulare ω_1 și ω_2 .

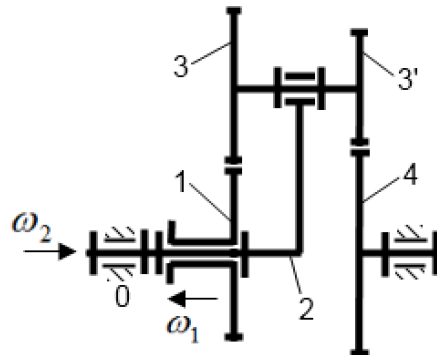


Fig.18 Transmisie diferențială cu roți dințate

Se determină raportul de transmitere aparent (raport de transmitere intrinsec):

$$i_{14}^{(2)} = \frac{\omega_1 - \omega_2}{\omega_4 - \omega_2} \quad (27)$$

$$i_{14}^{(2)} = \left(-\frac{z_3}{z_1} \right) \left(-\frac{z_4}{z_{3'}} \right) \quad (28)$$

din relațiile (27) și (28) se poate determina ω_4 .

Se va ține cont de sensul vitezelor unghiulare ale elementelor motoare. Semnul lui ω_4 va indica dacă sensul de rotire este același cu cel al lui ω_1 și ω_2 .

4.2c. Analiza cinematică a trenurilor de roți dințate cicloidale conice

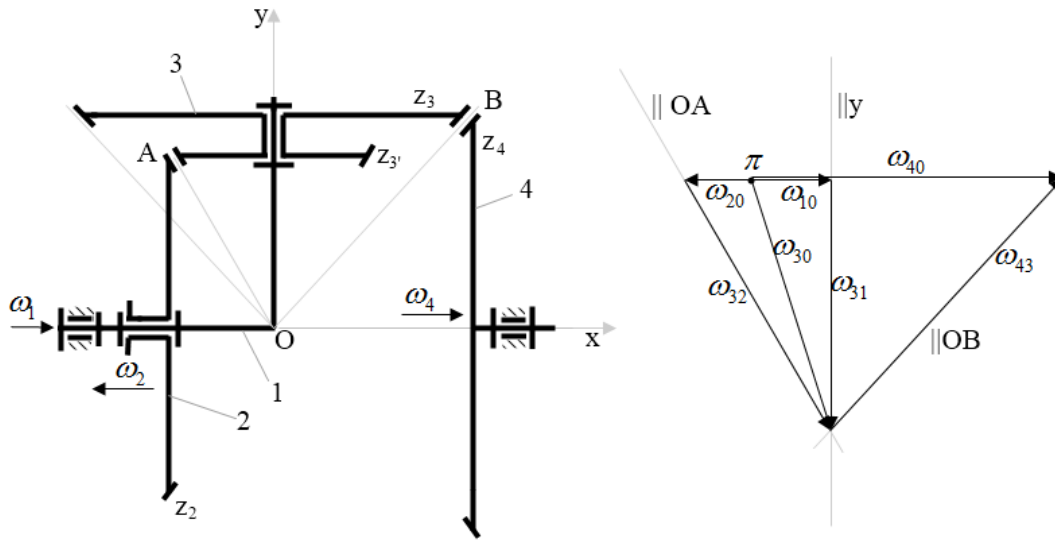


Fig.22 Tren de roți dințate conice – tip diferențial; Poligonul vitezelor

Metoda analitică

Se imprimă întregului ansamblu o mișcare de rotație cu $-\omega_1$, brațul port-satelit devenind aparent staționar, ar mecanismul aparent ordinar.

$$i_{24}^{(1)} = \frac{\omega_2 - \omega_1}{\omega_4 - \omega_1} = -\frac{z_3 \cdot z_4}{z_2 \cdot z_3} \quad (39)$$

semnul minus din relația (39) semnificând un sens de rotație invers lui ω_1 , acesta fiind determinat din aproape, în aproape urmărind angrenajele mecanismului.

Din relația (39) se poate determina ω_4 de ieșire, ținând cont că ω_1 și ω_2 sunt presupuse cunoscute.

Metoda grafo-analitică

La fel ca în cazul metodei analitice, se dorește determinarea vitezei unghiulare de ieșire $\omega_4 = \omega_{40}$.

Pentru aceasta, se pornește de la $\omega_1 = \omega_{10}$ și $\omega_2 = \omega_{20}$ (viteza unghiulară a lui ω_1 și ω_2 în raport cu elementul fix 0), se calculează ω_{30} , și apoi ω_{40} .

Pentru determinarea lui ω_{30} se rezolvă următorul sistem de ecuații vectoriale prin metoda grafică:

$$\begin{aligned} \overline{\omega_{30}} &= \overline{\omega_{10}} + \overline{\omega_{31}} \\ \overline{\omega_{30}} &= \overline{\omega_{20}} + \overline{\omega_{32}} \end{aligned} \quad (40)$$

cu $\omega_{31} \parallel Oy$ și $\omega_{32} \parallel OA$

Iar pentru determinarea lui ω_{40} :

$$\overline{\omega_{40}} = \overline{\omega_{30}} + \overline{\omega_{43}} \quad (41)$$

cu $\omega_{40} \parallel Ox$

5. Analiza cinematică a mecanismelor cu elemente de frecare
5.1. Transmiterea mișcării prin contact direct între elemente
5.2. Transmiterea mișcării cu element intermediar flexibil

5.1 Transmiterea mișcării prin contact direct între elemente

Transmiterea mișcării de rotație de la un element la altul se poate face și prin intermediul forțelor de frecare rezultând mecanismele cu roți de fricțiune.

Se consideră mecanismul cu roți de fricțiune cilindrice din Fig.24. El va putea funcționa doar în cazul în care forța exterioară Q va apăsa roțile de fricțiune una peste cealaltă. Ca urmare a acestei acțiuni apare forța de frecare periferică:

$$F_f = \mu Q \quad (42)$$

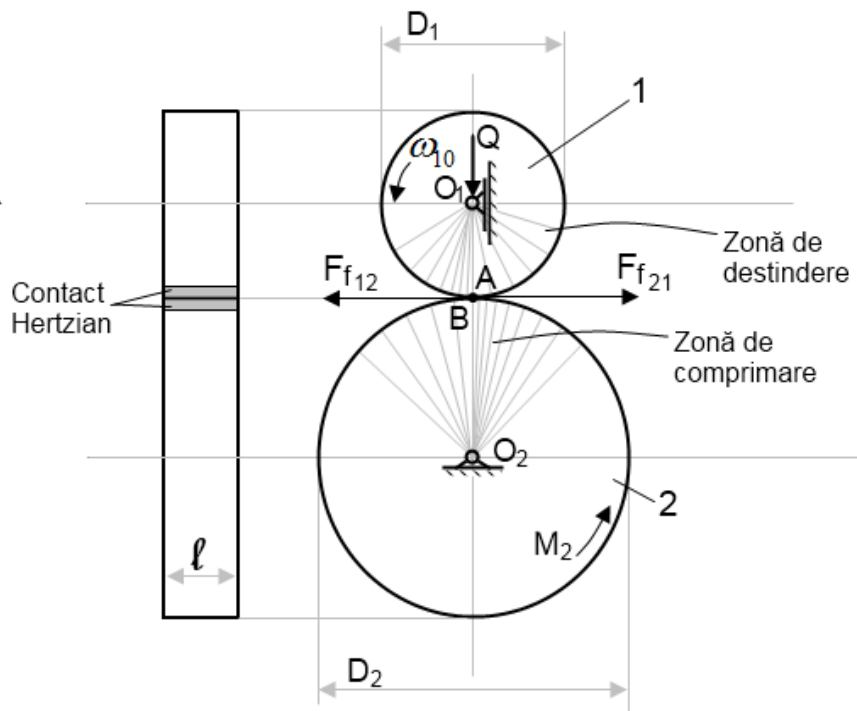


Fig. 24 Transmiterea mișcării prin roți de frecare

Puterea care va putea fi transmisă folosind acest tip de angrenaj este limitată, relația este determinată după cum urmează:

$$M_2 \leq F_f \frac{D_2}{2} \quad (43)$$

- unde M_2 - momentul rezistent al elementului 2
 F_f - forța de frecare periferică
 D_2 - diametrul roții 2

$$M_2 \leq \mu Q \frac{D_2}{2} \cdot \omega_{20} \quad (44)$$

rezultă:

$$P_2 \leq \omega_{20} \frac{D_2}{2} \mu Q \quad (45)$$

Se menționează că zona de contact dintre cele 2 elemente este de tip Hertzian.

Din relația (45) se poate concluziona că puterea transmisă printr-un angrenaj cu roți de frecare poate fi mărită prin două metode:

1. creșterea coeficientului de frecare dintre cele două elemente (de exemplu prin schimbarea perechii de materiale folosite pentru cele două roți)
2. creșterea lățimii de contact dintre cele două elemente notată cu l .

Metoda 2 este prezentată în Fig. 25 unde în roțile de fricțiune sunt prelucrate niște canale.

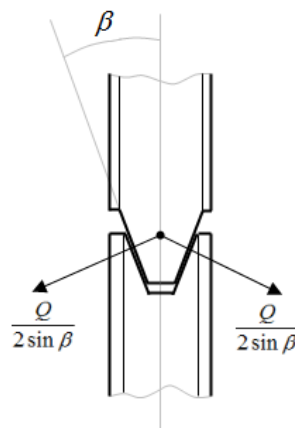


Fig. 25 Roți de fricțiune canelate

Pentru cazul acesta, forța de frecare devine:

$$F_f = \frac{\mu Q}{\sin \beta} \quad (46)$$

La depășirea valorii maxime a puterii transmisibile, apare fenomenul de patinare a roților de fricțiune, caracterizat de alunecarea relativă a zonelor de contact. Din cauza acestui fenomen se recomandă utilizarea doar în anumite condiții a roților de fricțiune pentru mecanisme de precizie.

Transmiterea mișcării prin forțele de frecare periferice se realizează cu deformarea elastică a zonei de contact – Fig.24. Aceasta se numește alunecare elastică și determină ca vitezele periferice ale celor 2 roți în zona de contact să nu fie egale, iar roata condusă va rămâne în urmă.

Raportul de transmitere se va determina după cum urmează:

$$\Delta v = v_A - v_B \quad (47)$$

rezultă

$$v_B = v_A - \Delta v = v_A \left(1 - \frac{\Delta v}{v_A} \right) = v_A (1 - \xi) \quad (48)$$

unde $\xi = \frac{\Delta v}{v_A}$ - coeficient de alunecare elastică, și se poate determina din graficul prezentat în Fig.26

iar
$$v_B = \omega_{20} \frac{D_2}{2} = v_A (1 - \xi) = \omega_{10} \frac{D_1}{2} (1 - \xi)$$

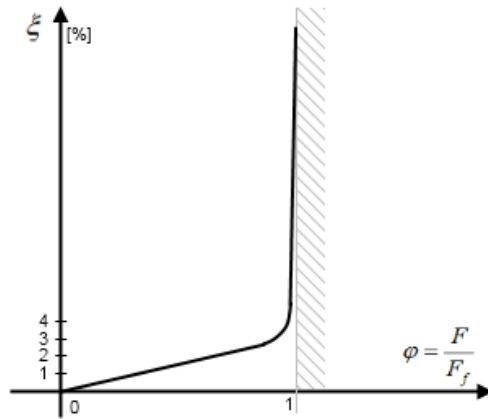


Fig. 26 Diagrama coeficientului de alunecare elastică

Se poate calcula raportul de transmitere:

$$i_{12} = \frac{\omega_{10}}{\omega_{20}} = \pm \frac{D_2}{D_1(1-\xi)} \quad (49)$$

5.2 Transmiterea mișcării cu element intermediar flexibil

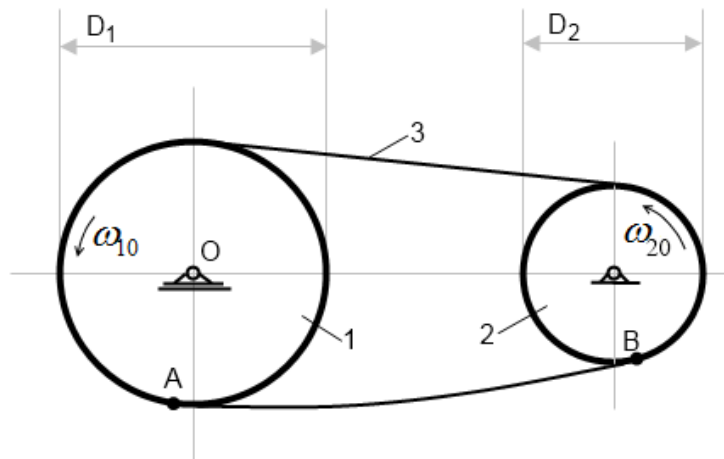


Fig.27 Transmitie prin curea – configurație directă

Mecanismul din Fig.27 reprezintă o transmisie cu element flexibil de tip curea în configurație directă. În acest caz, roata condusă păstrează sensul de rotație cu roata conducătoare, raportul de transmitere putând fi calculat folosind următoarea relație:

$$i_{12} = \frac{\omega_{10}}{\omega_{20}} = \frac{D_2}{D_1(1-\xi)}$$

Se notează cu 1 și 2 elementele de tip roată și cu 3 elementul de tip flexibil care asigură transmiterea mișcării între cele două elemente de tip roată. Elementul 3 – curea este supus la tracțiune în partea de sus a mecanismului dar în partea de jos (între punctele A și B) este nesolicitat, rezultând astfel detensionarea elementului flexibil. Acest fenomen conduce la efecte nedorite cum ar fi o patinare accentuată sau vibrații introduse în sistemul mecanic. Problema se poate soluționa întinzând această

zonă, fie prin creșterea distanței dintre elementele 1 și 2, punctul O putând să execute o mișcare de translație, fie prin introducerea unor role întinzătoare intermediare.

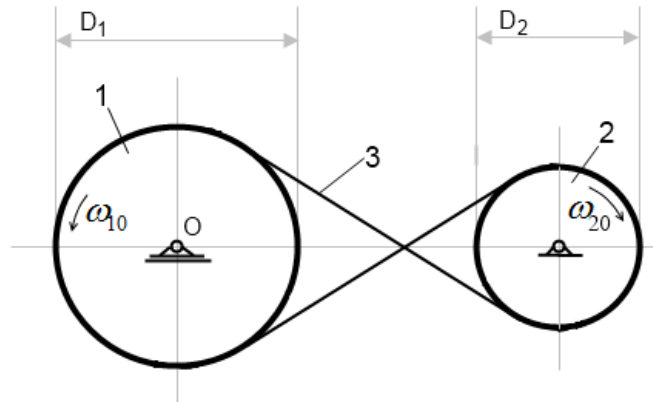


Fig.28 Transmisie prin curea – configurație în cruce

O variantă a mecanismului din Fig.27 este transmisia prin curea în configurație de tip cruce Fig.28. În acest caz se schimbă sensul de rotire pentru elementele 1 și 2, iar raportul de transmitere se calculează prin formula:

$$i_{12} = \frac{\omega_{10}}{\omega_{20}} = -\frac{D_2}{D_1(1-\xi)}$$

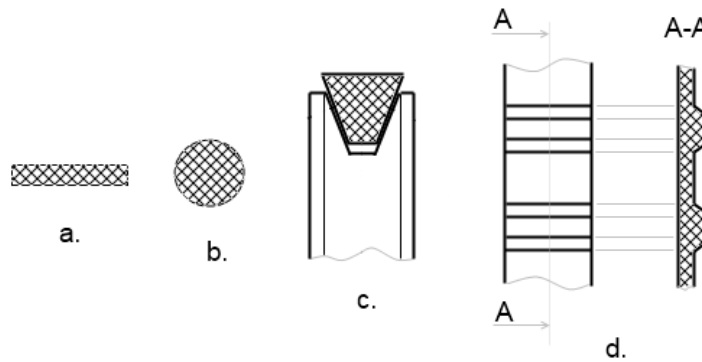


Fig.29 Tipuri de curele

În Fig. 29 sunt prezentate câteva tipuri uzuale de curele folosite pentru transmiterea mișcării:

- a. – curea lată
- b. – curea rotundă (funie, cablu)
- c. – curea trapezoidală
- d. – curea lată dințată (curea sincronă) – mișcarea se transmite datorită dinților curelei



Fig. 30 Transmisie cu fir flexibil

În Fig. 30 se prezintă un mecanism cu element elastic pentru transmiterea mișcării de rotație în care raportul de transmitere este variabil în funcție de profilul unei roți.

Anexa 1. Transmiterea mișcării de rotație. Axoizii mișcării relative

Așa cum s-a arătat mai sus, transmiterea mișcării de rotație se realizează cu ajutorul unor elemente de tipul roților. Pentru a determina forma geometrică a acestor roți în contact direct se vor determina axoizii mișcării relative pentru cele 3 cazuri de poziționare relativă a celor două axe între care se realizează transmiterea mișcării de rotație. Cazul general este cel al axelor oarecare (încrucișate) – Fig.4 din care, prin particularizări se pot obține cazurile axelor paralele, respectiv concurente. Pentru cazul general, se dorește demonstrarea faptului că forma obținută este un hiperboloid cu o pânză.

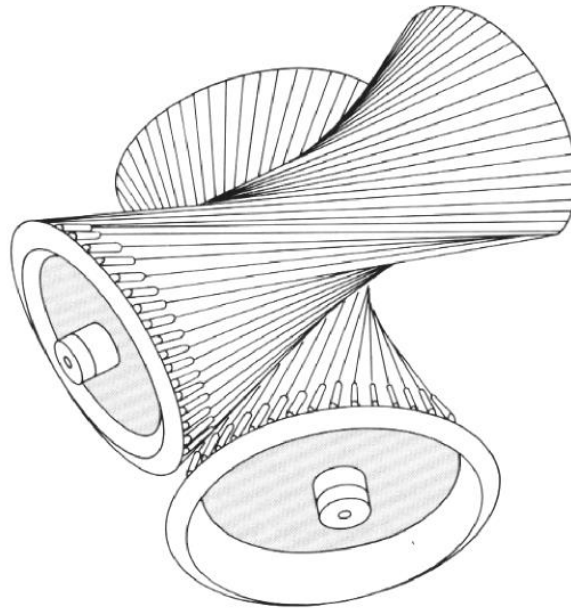


Fig. 4 Angrenaj hiperboloidal – poziția relativă a axelor este necoplanară [xxx]

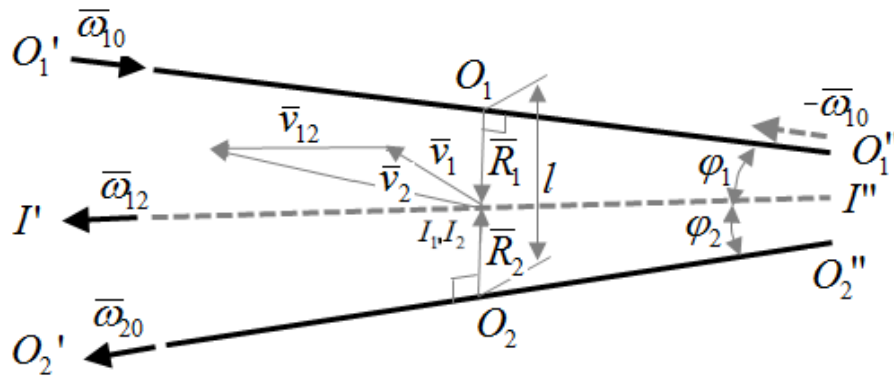


Fig.5 Axele necoplanare (încrucișate) ale unui angrenaj hiperboloidal

Se consideră elementul 1, rotindu-se în jurul axei $O_1'O_1''$ cu viteza unghiulară $\bar{\omega}_{10}$ și elementul 2 care se rotește în jurul axei $O_2'O_2''$ cu viteza unghiulară $\bar{\omega}_{20}$. Poziția celor două axe este încrucișată în spațiu sub unghiul δ cunoscut, dreapta O_1O_2 fiind perpendiculara comună a lor – Fig.5.

Pentru a analiza mișcarea celor două elemente, se dă întregului ansamblu o mișcare de rotație cu viteza unghiulară $-\bar{\omega}_{10}$ în jurul axei $O_1'O_1''$.

În felul acesta, elementul 1 va sta pe loc (aparent) iar elementul 2 va avea o mișcare complexă compusă din rotația în jurul axei proprii $O_2'O_2''$ și din rotația în jurul axei $O_1'O_1''$ (axa elementului 1 fixat acum). Suma celor două mișcări este o mișcare elicoidală, având axa instantanee de rotație notată cu $I'I''$, care intersectează în punctul I perpendiculara comună O_1O_2 a axelor și formează cu acestea unghiurile φ_1 și φ_2 .

Știm că:

$$\delta = \varphi_1 + \varphi_2 \quad (1)$$

și raportul de transmitere i_{12} este cunoscut.

Mișcarea elicoidală după axa instantanee $I'I''$ rezultată în urma compunerii celor două mișcări are viteza unghiulară:

$$-\bar{\omega}_{12} = \bar{\omega}_{10} - \bar{\omega}_{20} \quad (2)$$

Relația (2) se înmulțește vectorial cu $\bar{\omega}_{12}$, și rezultă:

$$0 = \bar{\omega}_{10} \times \bar{\omega}_{12} - \bar{\omega}_{20} \times \bar{\omega}_{12} \quad (3)$$

sau

$$\omega_{10}\omega_{12} \sin \varphi_1 - \omega_{20}\omega_{12} \sin \varphi_2 = 0 \quad (4)$$

se scrie expresia raportului de transmitere

$$i_{12} = \frac{\omega_{10}}{\omega_{20}} = \frac{\sin \varphi_2}{\sin \varphi_1} \quad (5)$$

Folosind relațiile (1) și (5) se pot determina unghiurile φ_1 și φ_2 , axa $I'I''$ fiind și ea perpendiculară pe normala comună O_1O_2

Pentru a determina punctul I de intersecție a axei instantanee de înșurubare $I'I''$ cu normala comună se consideră acest punct ca aparținând atât elementului 1 cât și elementului 2, adică punctul lor de contact. Vitezele punctelor în contact I_1 și I_2 au valorile:

$$\bar{v}_{I_1} = \bar{\omega}_{10} \times \bar{R}_1 \quad (6)$$

respectiv

$$\bar{v}_{I_2} = \bar{\omega}_{20} \times \bar{R}_2 \quad (7)$$

iar viteza relativă a punctului I_1 aparținând elementului 1 și I_2 aparținând de elementul 2 va fi:

$$\bar{v}_{I_{12}} = \bar{v}_{I_1} - \bar{v}_{I_2} = \bar{\omega}_{10} \times \bar{R}_1 - \bar{\omega}_{20} \times \bar{R}_2 \quad (8)$$

și este paralelă cu direcția $I'I''$ deci și cu $\bar{\omega}_{12}$

Înmulțind vectorial la stânga relația (8) cu $\bar{\omega}_{12}$ și dezvoltând dubbele produse vectoriale rezultă:

$$\bar{\omega}_{12} \times \bar{v}_{I_{12}} = \bar{\omega}_{12} \times (\bar{\omega}_{10} \times \bar{R}_1 - \bar{\omega}_{20} \times \bar{R}_2) \quad (9)$$

dar $\bar{\omega}_{12} \times \bar{v}_{I_{12}} = 0$

rezultă astfel relația

$$0 = \bar{\omega}_{12} \times (\bar{\omega}_{10} \times \bar{R}_1) - \bar{\omega}_{12} \times (\bar{\omega}_{20} \times \bar{R}_2) \quad (10)$$

$$\bar{\omega}_{10} \cdot (\bar{\omega}_{12} \bar{R}_1) - \bar{R}_1 \cdot (\bar{\omega}_{12} \bar{\omega}_{10}) - \bar{\omega}_{20} \cdot (\bar{\omega}_{12} \bar{R}_2) + \bar{R}_2 \cdot (\bar{\omega}_{12} \bar{\omega}_{20}) = 0 \quad (11)$$

dar $\bar{\omega}_{12} \bar{R}_1 = 0$ și $\bar{\omega}_{12} \bar{R}_2 = 0$ (vectori perpendicularari), astfel relația (11) devine

$$- \bar{R}_1 \omega_{12} \omega_{10} \cos \varphi_1 + \bar{R}_2 \bar{\omega}_{12} \bar{\omega}_{20} \cos \varphi_2 = 0 \quad (12)$$

Din (12), cu \bar{R}_1 și \bar{R}_2 colineari, $\omega_{12} \neq 0$ și $i_{12} = \frac{\omega_{10}}{\omega_{20}} = \frac{\sin \varphi_2}{\sin \varphi_1}$ rezultă sistemul:

$$\begin{cases} \frac{R_2}{R_1} = \frac{\omega_{10} \cos \varphi_1}{\omega_{20} \cos \varphi_2} = \frac{\sin \varphi_2 \cos \varphi_1}{\sin \varphi_1 \cos \varphi_2} = \frac{\tan \varphi_2}{\tan \varphi_1} \\ R_1 + R_2 = l = ct. \end{cases} \quad (13)$$

din care se determină \bar{R}_1 și \bar{R}_2 , adică poziția lui I

Din relațiile (1), (5) și (13) rezultă că axa $I'I''$ ocupă o poziție invariabilă în raport cu axele $O_1'O_1''$ și $O_2'O_2''$.

În aceste condiții, la aplicarea mișcării ipotetice suplimentare de rotație cu viteza unghiulară $-\bar{\omega}_{10}$ în jurul axei $O_1'O_1''$, axa $I'I''$ va genera o suprafață de ruletă care reprezintă un hiperboloid cu o pânză pentru elementul 1. În mod asemănător, relativ la axa $O_2'O_2''$, se obține configurația elementului 2 tot sub forma unui hiperboloid de rotație cu o singură pânză.

Deci, axozii mișcării relative în cazul axelor de rotație încrucișate sunt hiperboloizi de rotație cu o singură pânză, tangenți după axa $I'I''$ - Fig.4.

(Generarea unui hiperboloid prin rotirea unei linii în jurul unei axe, linia generatoare necoplanară față de axă, <http://www.youtube.com/watch?v=Gsi0j9VUbow>)

Cazuri particulare

Cazul 1. Dacă axele de rotație a elementelor 1 și 2 sunt **paralele**, atunci

$$\delta = \varphi_1 = \varphi_2 = 0 \quad (14)$$

Considerând ecuația (13) obținem

$$\frac{R_2}{R_1} = \frac{\omega_{10} \cos 0^\circ}{\omega_{20} \cos 0^\circ} = \frac{\omega_{10}}{\omega_{20}} = i_{12} \quad (15)$$

În acest caz axoziile mișcării relative devin niște cilindri având în vedere faptul că axele de rotație ale elementelor 1 și 2 sunt paralele cu axa instantanee de rotație – Fig.6

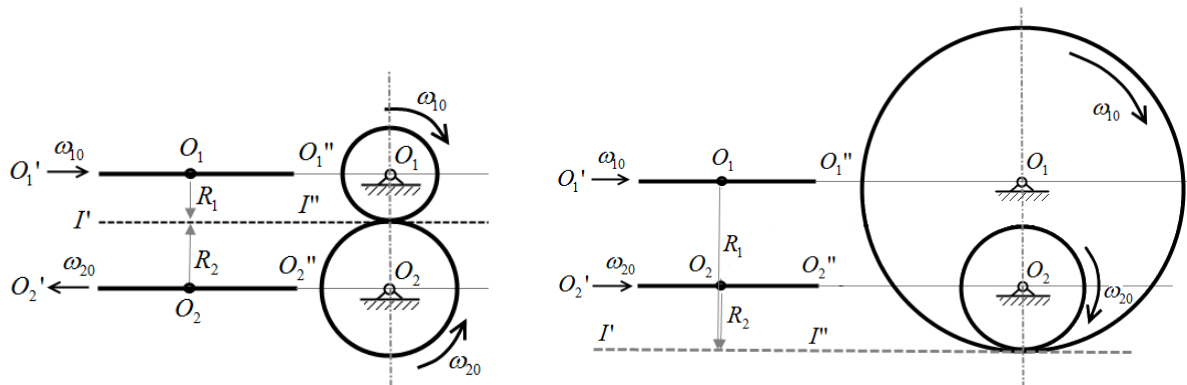


Fig.6 Axoziile mișcării relative – cilindrii (cazul axelor paralele)

Cazul 2. Dacă axele de rotație a elementelor 1 și 2 sunt **concurente**, atunci lungimea normalei comune devine nulă, adică

$$l = 0 = R_1 = R_2 \quad (16)$$

iar din relația (13) rezultă

$$i_{12} = \frac{\omega_{10}}{\omega_{20}} = \frac{\sin \varphi_2}{\sin \varphi_1} \cdot \frac{OP}{OP} = \frac{r_2}{r_1} \quad (17)$$

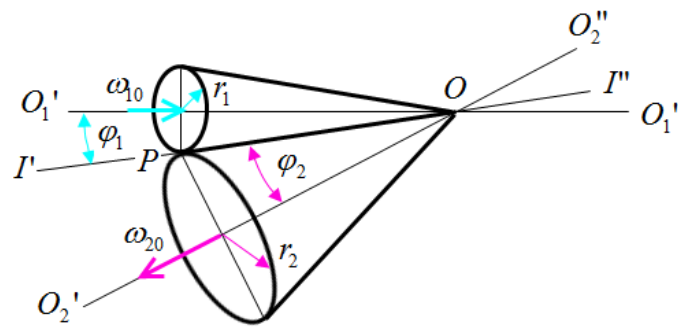


Fig.7 Axoziile mișcării relative – conuri (cazul axelor concurente)

Se observă că axoziile mișcării relative sunt în acest caz conuri circulare drepte – Fig.7. Generatoarea comună este identică cu axa $I'I''$ care devine axă instantanee de rotație deoarece conform relației (8), $\vec{v}_{I_{12}} = \vec{v}_{I_1} = \vec{v}_{I_2} = \vec{0}$. Punctul P este un punct oarecare pe generatoarea comună $I'I''$

Anexa 2. Metoda grafo-analitică – Kutzbach

Metoda se bazează pe distribuția vitezelor dispuse pe raza unui disc rotitor. Viteza punctului A va crește liniar odată cu depărtarea acestuia de centrul discului.

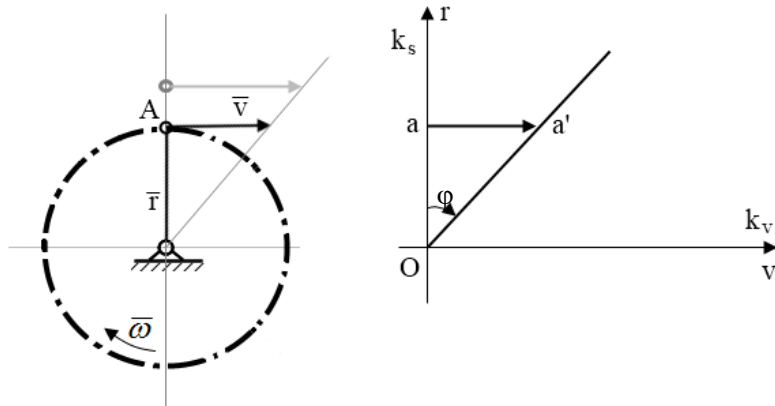


Fig. 19 Distribuția vitezelor pe un disc

Pornind de la viteza punctului A, se dorește determinarea vitezei unghiulare a discului:

$$\bar{v} = \bar{\omega} \times \bar{r} \quad (29)$$

sau

$$v = \omega r \quad (30)$$

și

$$d = mz \quad (31)$$

unde d – diametrul discului (roții dințate)
 m – modulul roții dințate

$$r = \frac{mz}{2} \quad (32)$$

$$aa' = \frac{v}{k_v} = \frac{\omega r}{k_v} \quad (33)$$

unde k_v este scara la care se face reprezentarea vectorilor viteze

$$Oa = \frac{r}{k_s} \quad (34)$$

unde k_s este scara la care se face reprezentarea vectorilor de poziție pentru punctul A

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{aa'}{Oa} = \frac{\omega r}{r} \frac{k_s}{k_v} \quad (35)$$

Din relația (35) se poate determina viteza unghiulară:

$$\omega = \frac{k_v}{k_s} \operatorname{tg} \varphi \quad (36)$$

Starea de mișcare a unui element este determinată de vitezele a două puncte distincte aparținând elementului.

Pentru a face analiza unui mecanism prin această metodă, se face schema cinematică a mecanismului la scară și se proiectează punctele pe o dreaptă de viteză nulă, după care se compun vectorii, și rezultă viteza unghiulară căutată la scară.

În Fig.20 se prezintă un mecanism planetar. Se dorește analizarea acestuia folosind metoda grafo-analitică Kutzbach.

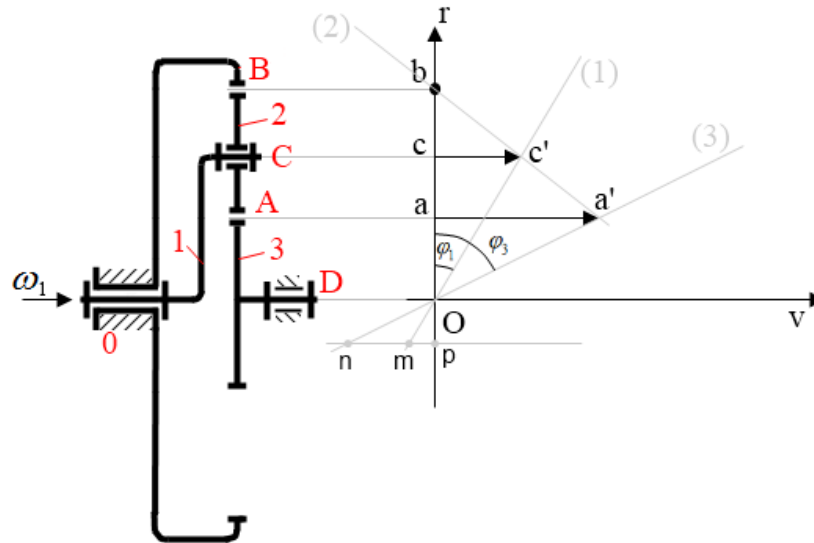


Fig.20 Metoda Kutzbach pentru un mecanism planetar

Pentru aceasta se desenează schema cinematică a mecanismului la scară. Se trasează sistemul de coordonate vOr , astfel încât Ov să treacă prin axa de rotație a brațului port-satelit.

Pentru a reprezenta viteza punctului B, se trasează o paralelă la axa Ov prin punctul B al mecanismului, aceasta intersectând axa Or în punctul b. Se reține acest punct pentru că viteza punctului B este 0, punctul B aparținând de elementul fix.

Se reprezintă viteza punctului C, trasând o paralelă la axa Ov prin punctul C al mecanismului. Aceasta intersectează axa Or în punctul c. Pe această direcție se trasează la scară vectorul $\overline{cc'}$ la scara k_s .

$$v_C = \omega_1 l_{Oc} \quad \overline{cc'} = \frac{v_c}{k_s} \quad l_{Oc} = r_2 + r_3 = \frac{mz_2}{2} + \frac{mz_3}{2}$$

Se unesc punctele c' și O prin dreapta (1), rezultând astfel unghiul φ_1 .

Construim dreapta (2) prin unirea punctelor b și c' .

Se reprezintă viteza punctului A, trasând o paralelă la Ov prin punctul A al mecanismului. Aceasta se intersectează cu axa Or în punctul a, și cu dreapta (2) în punctul a' , vectorul $\overline{aa'}$ reprezentând viteza punctului A la scara k_s .

$$v_A = \frac{\overline{aa'}}{k_s}, \quad \text{unde } \overline{aa'} \text{ se măsoară pe figură}$$

Se unesc punctele a' și O prin dreapta (3), rezultând astfel unghiul φ_3 .

Se calculează raportul de transmitere:
$$i_{13} = \frac{\omega_1}{\omega_3} = \frac{\frac{k_v}{k_s} \operatorname{tg} \varphi_1}{\frac{k_v}{k_s} \operatorname{tg} \varphi_3} = \frac{\operatorname{tg} \varphi_1}{\operatorname{tg} \varphi_3} \quad (37)$$

Pentru o determinare mai rapidă și mai simplă, se poate face următoarea construcție: se consideră punctul p arbitrar pe axa Or. Prin acesta se trasează o paralelă la axa Ov. Paralela intersectează dreapta (1) în m și dreapta (3) în n.

Se poate scrie relația:
$$i_{13} = \frac{\operatorname{tg} \varphi_1}{\operatorname{tg} \varphi_3} = \frac{\frac{Op}{pn}}{\frac{pm}{Op}} = \frac{pm}{pn} \quad (38)$$

lungimile segmentelor pm și pn fiind măsurate pe grafic.

În Fig.21 se prezintă un mecanism diferențial pentru care se dorește efectuarea analizei cinematice prin metoda Kutzbach.

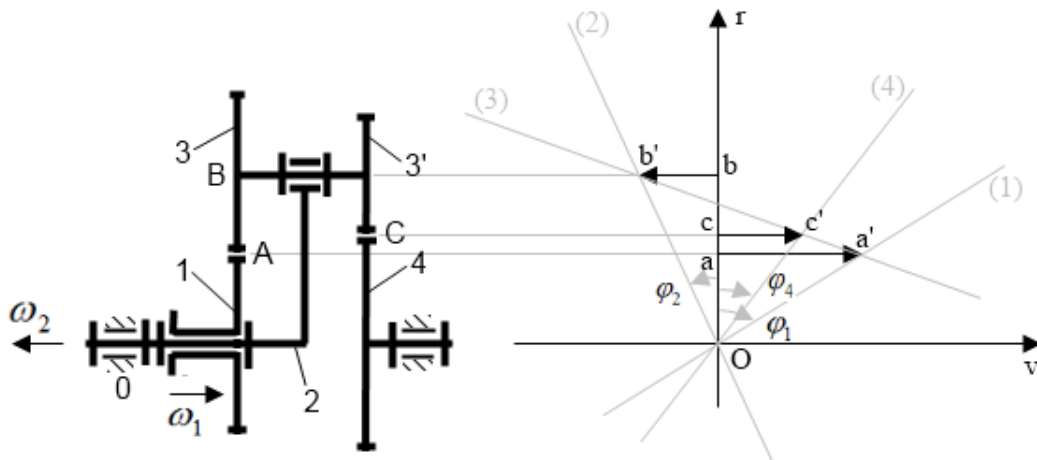


Fig.21 Metoda Kutzbach aplicată la un mecanism diferențial

Pentru că se cunosc vitezele ω_1 și ω_2 , se scriu relațiile pentru vitezele punctelor A și B,

$$v_A = \omega_1 l_{Oa} \quad \overline{aa'} = \frac{v_A}{k_s} \quad l_{Oa} = r_1 = \frac{mz_1}{2}$$

și

$$v_B = \omega_2 l_{Ob} \quad \overline{bb'} = \frac{v_B}{k_s} \quad l_{Ob} = r_1 + r_3 = \frac{mz_1}{2} + \frac{mz_3}{2}$$

Se construiește dreapta (3) prin unirea punctelor a' și b'. Pentru a obține punctul c', se unește dreapta (3) cu paralela la Ov prin punctul c. Lungimea lui cc' se va determina prin măsurare, lungimea lui Oc este egală cu r_4 , deci se poate determina φ_4

$$\operatorname{tg} \varphi_4 = \frac{cc'}{Oc}$$

iar conform relației (36),

$$\omega_4 = \frac{k_v}{k_s} \operatorname{tg} \varphi_4$$

Făcând înlocuirile și trecerile la scară, valoarea lui ω_4 poate fi determinată și numeric.