## Sinteza mecanismelor cu roti dintate

1. Generalitati
2. Legea angrenarii
3. Constructia profilelor conjugate
4. Geometria profilului evolventic
5. Cremaliera de referinta
6. Deplasari de profil
7. Gradul de acoperire

Sinteza mecanismelor cu roți dințate are ca scop definirea geometrică a roților și danturilor acestora astfel încât să se asigure condițiile funcționale impuse, adică să se realizeze transmiterea mișcării de rotație cu un raport de transmitere impus prin tema de proiectare.

Acest capitol se ocupa cu prezentarea procesului de sinteza a unui angrenaj cu roti dintate cilindrice cu dinti drepti. Alte variante de roti dintate sunt roti dintate cu dinti inclinati, roti dintate conice, roti dintate conice cu angrenaj hipoid.

Etapele parcurse sunt strans legate de ordinea subcapitolelor anume,

- dupa o prima faza se obtine forma (profilul) dintilor rotilor dintate (un profil evolventic ce respectar legea angrenarii). Acesta este inca nedefinit
- apoi se defineste geometria rotii (diametre, raze etc.) bazat pe ideea ca rotile dintate vor fi prelucrate folosind o cremaliera scula standardizata
- se defineste geometria profilului evolventic al unui dinte de roata dintata evolventica
- verificare a rezultatelor prin determinarea gradului de acoperire

### 1. Generalitati. Elementele caracteristice ale danturii unei roți dințate

În Fig.1 se prezintă configurația geometrică a danturii unei roți dințate cilindrice și denumirea elementelor caracteristice ale acesteia. Aceasta nomenclatura este standardizata si utilizata la fel pe tot mapamondul. Notatiile standard utilizate sunt urmatoarele:

**Suprafața de cap** și **de picior** delimitează dantura în înălțime.
**Flancul** reprezintă fața laterală a roții dințate.
**Linia flancului** reprezintă intersecția dintre flancul dintelui și suprafața de divizare pe care se face, în mod convențional, segmentarea/divizarea danturii.
**Profilul frontal** al dintelui reprezintă intersecția dintre flancul dintelui și un plan perpendicular pe axa roții.

**Cercul de bază** este cercul de la care începe trasarea/generarea evolventei care generează profilul dintelui. Cercul de baza este definit de raza de baza $r_b$

**Inaltimea capului dintelui / Addendum-ul** ($h_a$) este înălțimea dintelui măsurată de la cercul de divizare (sau distanța radială dintre cercul de divizare și cercul de cap al unui dinte)

**Inaltimea piciorului dintelui / Dedendum-ul** ($h_f$)este distanța radială de la cercul de divizare la cercul de picior pentru un dinte

**Axa** este axa de rotație a roții dințate

**Pasul danturii** ($p$) este **distanța** dintre două puncte omoloage de pe doi dinți adiacenți. Poate fi **unghiular** (unghiul pe care punctele și centrul roții îl formează) sau pe **coarda** care unește cele două puncte.

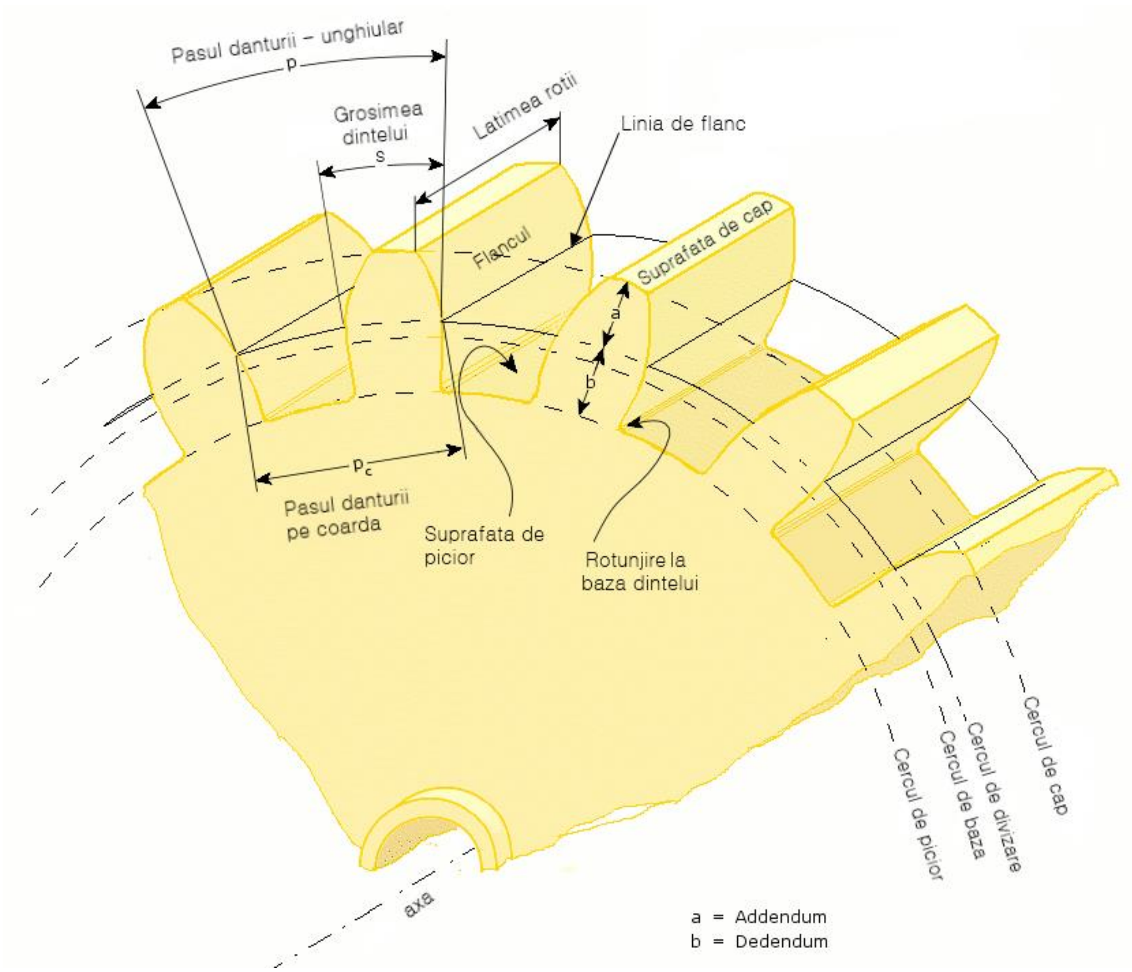



Fig.1 Dimensiuni caracteristice ale unei roți dințate

**Angrenajul plan.** Pentru a simplifica procesul de desenare se va trece de la figuri 3D ale unei roti dintate (bazate pe forme geometrice tip cilindru) la desene 2D bazate pe cercuri. Se va obtine astfel **angrenajul plan**, in care cilindrii in sectiune transversala vor avea forma de cerc.

**Angrenajul plan** este angrenajul obținut prin secționarea unui angrenaj cilindric cu un plan frontal, perpendicular pe axe.

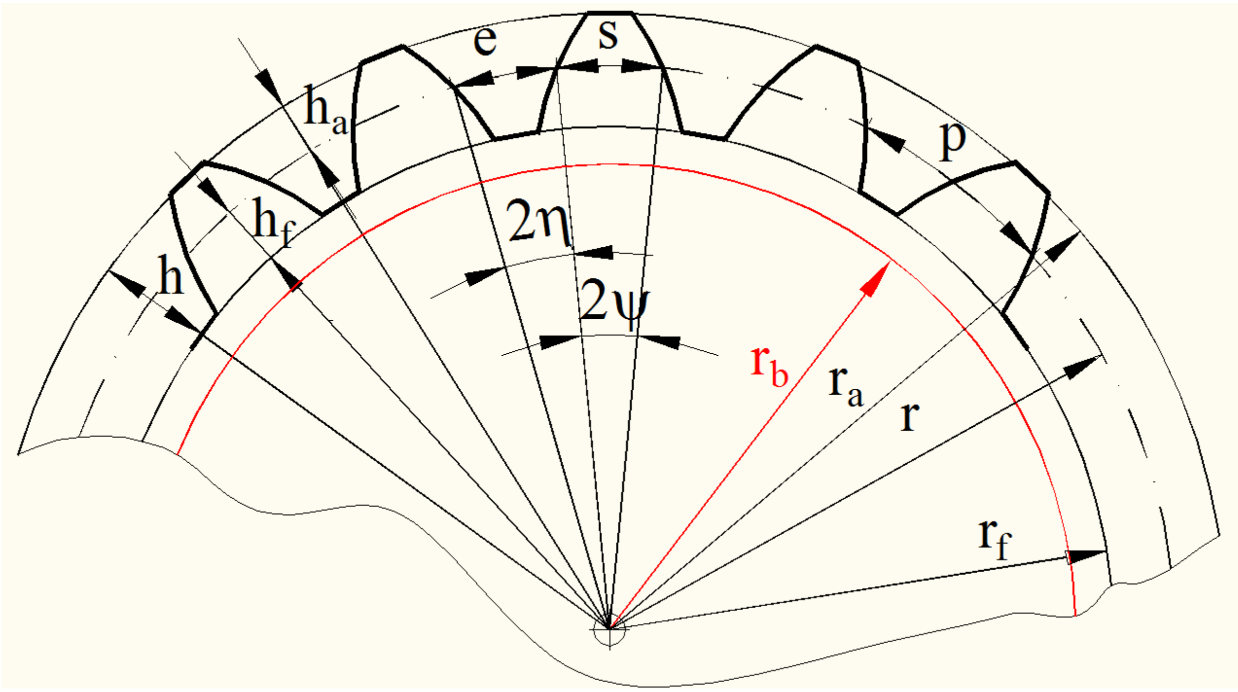



Fig.2 Sectiune plana printr-o roata dintata

In Fig.2 se pot identifica elementele caracteristice unei roti dintate, in plan frontal, acestea fiind urmatoarele:

| Elemente ce definesc geometria rotii dintate | Elemente de definesc geometria dintelui |
|---|---|
| $r_b$ – raza de bază<br>$r_f$ – raza de picior<br>r – raza de divizare<br>$r_a$ – raza de cap | h - inălţimea dintelui<br>$h_f$ - înălţimea piciorului dintelui<br>$h_a$ - înălţimea capului dintelui<br>e – arcul de divizare al golului dintre dinţi<br>s – arcul de divizare al dintelui<br>p – pasul de divizare |

Pentru un angrenaj se foloseste indicele 1 pentru roata dintata 1 si 2 pentru roata dintata 2

## 2. Legea angrenarii

Legea angrenarii presupune impunerea a doua conditii pe care cele doua roti dintate in angrenare trebuie sa le satisfaca. In Fig. 3 se prezinta un angrenaj plan

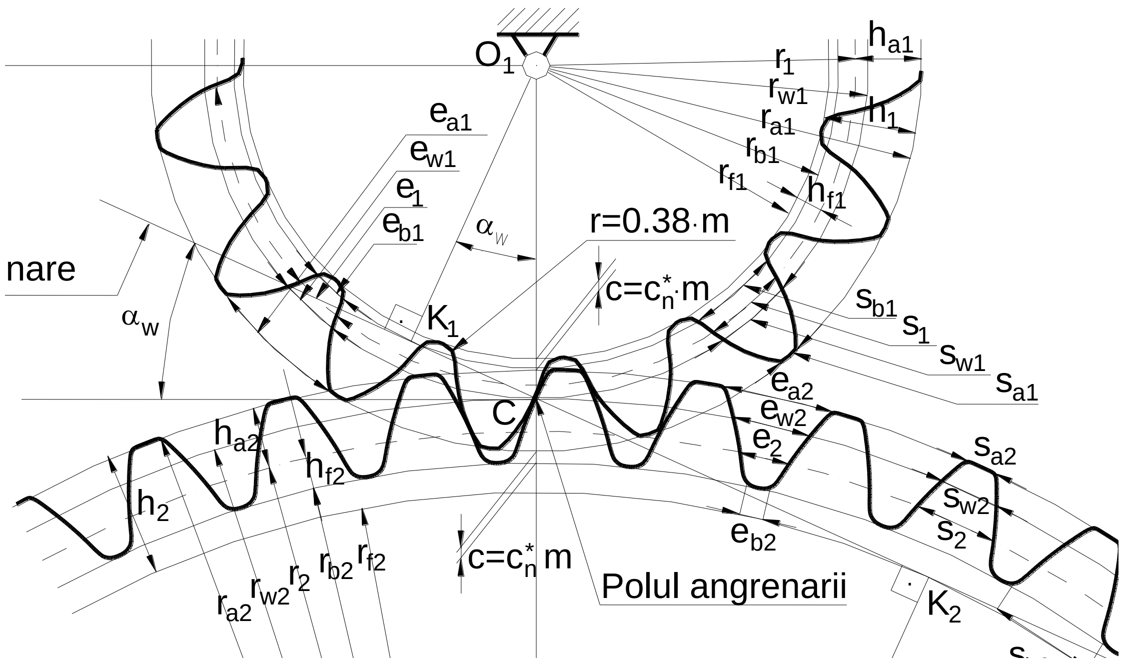



Fig. 3 Angrenaj plan

<u>Conditia 1</u>

Pentru a putea transmite miscarea de la roata dintata 1 la roata dintata 2, dintele rotii dintate 1 trebuie sa intre in angrenare cu golul dintre dinti pe roata dintata 2, ca urmare se formuleaza Conditia 1:

<u>Conditia 1: Arcul de divizare al dintelui roţii dinţate este egal cu arcul de divizare al golului dintre dinţi al roţii dinţate cu care acesta angrenează şi invers.</u>

Matematic acest lucru se exprima in felul urmator:

$$
\begin{aligned}
& s_1 = e_2 \\
& e_1 = s_2 \\
& \Rightarrow s_1 + e_1 = s_2 + e_2 \\
& \Rightarrow p_1 = p_2 = p
\end{aligned}
$$

Rezulta ca **pasul danturii** va fi acelasi pe cele doua roti dintate. Pasul unei danturi se poate calcula impartind lungimea cercului de divizare la numarul de dinti: $p = \frac{2\pi r}{z}$

obtinand relatia de calcul a **modulului**: $$\frac{p}{\pi} = \frac{2r}{z} = \frac{d}{z} = m$$

<u>Concluzia pentru conditia 1</u>: Condiţia necesară ca două roţi dinţate să poate fi în angrenare este ca acestea să aibă acelaşi modul m:

$$m_1 = m_2 = m$$

**Modulul** este marimea standardizata utilizata in proiectarea/alegerea de roti dintate in detrimentul pasului danturii. Valorile pentru modul nu pot fi oarecare, ele fiind alese din STAS, pentru a reduce varietatea de roti dintate. Modulul arată mărimea danturii. Valori uzuale pentru modul sunt

| | | |
|---|---|---|
| Modulul, [mm] (după STAS 822-82) | Mecanică fină | 0,05; 0,055; 0,06; 0,07; 0,08; 0,09; 0,1; 0,11;0,12; 0,14; 0,15; 0,18; 0,2; 0,22 ; 0,25; 0,28;0,3; 0,35;0,4; 0,45; 0,5; 0,55; 0,6; 0,7; 0,8; 0,9; 1,0. |
| | Mecanică generală şi grea | 1; 1,125; 1,25; 1,375; 1,5; 1,75;2; 2,25; 2,5; 2,75;3; 3,5; 4; 4,5; 5; 5,5; 6; 7; 8; 9; 10; 11; 12; 14; 16; 18; 20; 22;25; 28; 32; 36;40; 45; 50; 55;60; 70; 80; 90;100. |

<u>Conditia 2</u>

<u>Conditia 2: Raportul de transmitere instantaneu trebuie să rămână constant şi egal cu raportul de transmitere mediu.</u>

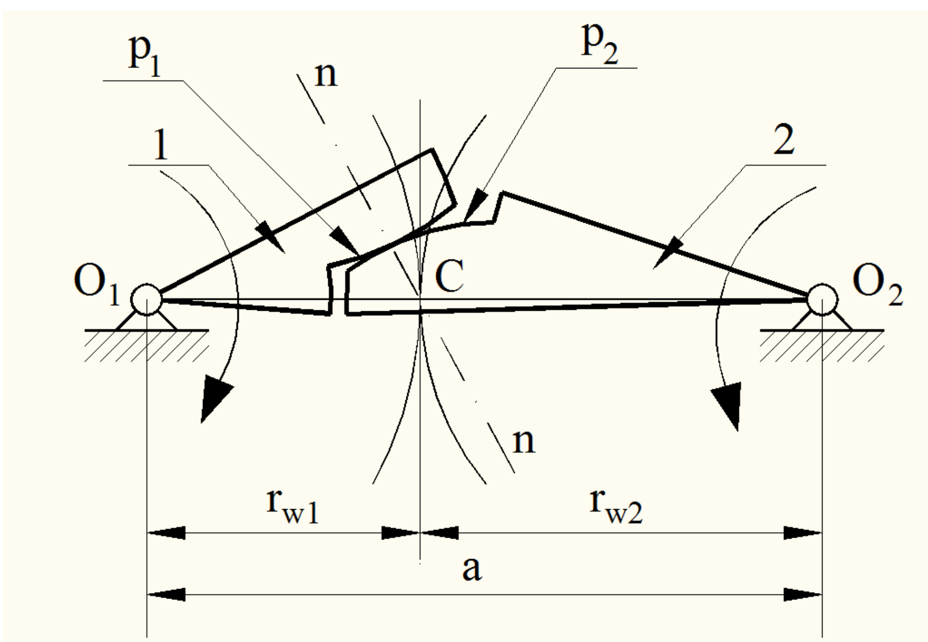



Fig. 4 Determinarea CIR în mișcarea relativă a elementelor 1 și 2

Așa cum s-a arătat în capitolul ”Structura mecanismelor - Transformarea instantaneu izocinetică”, centrul instantaneu de rotație în mișcarea relativă a două elemente legate între ele printr-o cuplă cinematică superioară se găsește pe normala comună la profile în punctul de contact. Pentru cei doi dinți aflați în contact din Fig.4, CIR ( $I_{12}$ ) se va găsi la intersecția normalei n-n cu linia centrelor $O_1O_2$.

În acest caz, raportul de transmitere se poate scrie sub forma:

$$i_{12} = \frac{\omega_{10}}{\omega_{20}} = \frac{O_2 I}{O_1 I} = \frac{r_{w2}}{r_{w1}} = ct \tag{2.1}$$

iar **distanța (invariabilă) dintre axe este**:

$$a = O_1 I + O_2 I = r_{w1} + r_{w2} \tag{2.2}$$

din aceste expresii rezultă

$$r_{w1} = \frac{a}{i_{12}+1} \text{ și } r_{w2} = a\frac{i_{12}}{i_{12}+1} \tag{2.3}$$

adică centrul instantaneu de rotație (CIR) I ocupă o poziție finită pe linia centrelor. În cazul angrenajelor el poartă numele de **pol al angrenării** și se notează cu C. Profilele care satisfac această condiție se numesc profile conjugate

**Se notează cu $r_{w1}$ și $r_{w2}$ razele cercurilor de rostogolire corespunzătoare celor două roți dințate aflate în angrenare. Acestea sunt primele dimensiuni geometrice determinate ale rotilor ce formeaza angrenajul.**

Concluzia pentru Conditia 2: Conditia ca doua profile sa fie conjugate este ca normala comuna in punctul de contact, pentru o pozitie a profilelor sa treaca prin polul de angrenare.

Profilele care respecta legea angrenarii se numesc **profile conjugate**. Literatura da o metoda de obtinere a profilelor conjugate (Metoda Reuleaux – vezi ANEXA 1). Pe scurt, metoda presupune existenta profilului dintelui 2 si determinarea profilului dintelui 1 tinand cont de legea angrenarii. Considerand un punct curent M2 apartinand unui profil p2, prin metoda Reuleaux se poate construi profilul conjugat profilului p2 ai anume un profil p1. Daca punctul curent M2 parcurge profilul p2, punctul M1 va genera profilul p1 iar punctul de contact M va descrie in planul fix o curba numita linie de angrenarePentru aceasta se considera un punct M2 care ocupa pozitii succesive pe profilul dintelui 2, care daca este „oglindit” prin legea de angrenare produce punctul omolog M1. In acest fel punctele M1 si M2 sunt omoloage si respecta legea angrenarii. In miscare, vor intra in contact perechi de puncte { M1 ϵ (profil 1), M2 ϵ (profil 2) } producand punctul de contact M.

**Linia de angrenare** se defineste ca fiind locul geometric al punctelor de contact M (in planul fix) intre cele doua profile conjugate.

**Interschimbabilitatea rotilor dintate**

Se pune problema cum arata profilul dintilor rotilor dintate astfel incat acestea sa fie interschimbabile, sigur cu acelasi modul. Cu ajutorul liniei de angrenare se poate stabili conditia ca un set de roti dintate avand acelasi modul sa fie interschimbabile, adica oricare din ele sa poata forma un angrenaj cu respectarea legii angrenarii.

<u>Conditia interschimbabilitatii rotilor dintate de acelasi modul este ca liniile lor de angrenare sa fie identice si simetrice in raport cu polul angrenarii.</u>

Situatia cea mai utilizata este cand **linia de angrenare este o dreapta**. In acest caz **profilul dintelui este EVOLVENTIC**

## 3. Constructia profilelor conjugate (evolventice)

Pentru a obtine profile evolventice conjugate, se considera doua roti dintate reprezentate prin cercurile de rostogolire de raza $rw_1$ si $rw_2$, si linia de angrenare ca fiind o dreapta “l” care face un unghi $\alpha_w$ cu tangenta comuna la cele doua cercuri de rostogolire – Fig.6

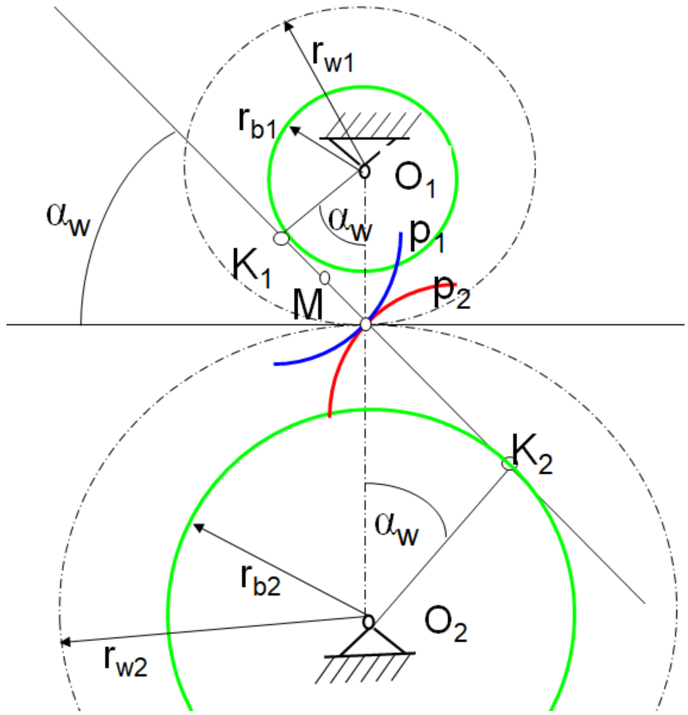



Fig. 6 Profile conjugate cu Linie de angrenare o dreaptă produc profile evolventice

Consideram un punct M∈l care se deplaseaza cu viteza egala cu proiectia vitezei periferice a cercurilor de rostogolire pe dreapta “l”:

$$V_M = \omega_1 \cdot r_{w1} \cdot \cos\alpha_w = \omega_2 \cdot r_{w2} \cdot \cos\alpha_w$$

Aceasta reprezinta viteza periferica a unor cercuri de raza

$$r_{b1} = r_{w1} \cdot \cos\alpha_w$$

$$r_{b2} = r_{w2} \cdot \cos\alpha_w$$

de unde se obtine $$V_M = \omega_1 \cdot r_{b1} = \omega_2 \cdot r_{b2} \qquad (3.1)$$

folosind relatia (3.1) se poate calcula $r_{b1}$ si $r_{b2}$. Acestea reprezinta raza **cercului de baza** pentru cele doua roti dintate.

Relatia (3.1) reprezinta posibilitatea transmiterii miscarii de rotatie intre 1 si 2 cu ajutorul unui element flexibil care se desfasoara de pe cercul $rb_1$ si se infasoara pe cercul $rb_2$.

In acest fel se obtin profile conjugate evolventice.

**Evolventa este** locul geometric al punctelor de pe o dreapta care se rostogoleste peste cercurile de baza.

$\alpha_w$ – poarta numele de unghi de presiune pe cercurile de rostogolire sau unghi de angrenare.

Din cauza definitiei evolventei, toate relatiile de calcul folosite la determinarea dimensiunilor geometrice ale rotilor dintate vor fi valabile doar deasupra **cercului de baza**, ele neputand fi folosite sub.

**Cercul de baza** poate fi definit ca cercul de la care porneste trasarea evolventei ce defineste profilul dintelui.

In literatura se mai ofera un tip de profil de roti dintate – **roti dintate cicloidale**. Vezi ANEXA 2. In Fig. 7 se prezinta un angrenaj cu profil cicloidal

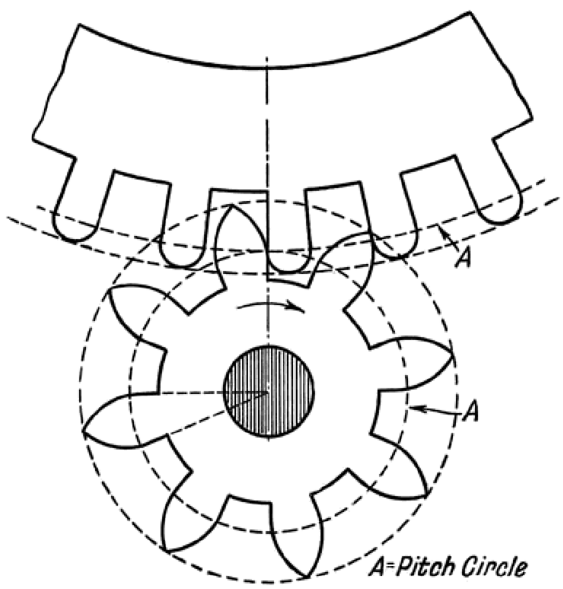



Fig. 7 Angrenaj având **profil cicloidal** utilizată la un mecanism de ceas

(**With the Watchmaker at the Bench,**(1943) by Donald de Carle (1893-1989) http://www.numericana.com/answer/gears.htm)

Se preferă folosirea angrenajelor cu profile evolventice pentru că nu sunt sensibile la mici variații ale distanței dintre axe. sunt interschimbabile (linia de angrenare este o dreaptă pentru toate roțile), sensibilitate relativ scăzută pentru variații ale forței de angrenare, tehnologie de execuție relativ facilă.

## 4. Geometria profilului evolventic

Dupa ce s-a demonstrat in sectiunea anterioara ca profilul evolventic poate fi utilizat pentru a defini forma dintilor rotii dintate, in aceasta sectiune se prezinta aspecte legate de construirea evolventei, curba ce produce profilul evolventic.

Curba descrisă de un punct aparţinând unei drepte care se rostogoleşte pe un cerc se numeşte **evolventă** (curba BM). Fig. 8

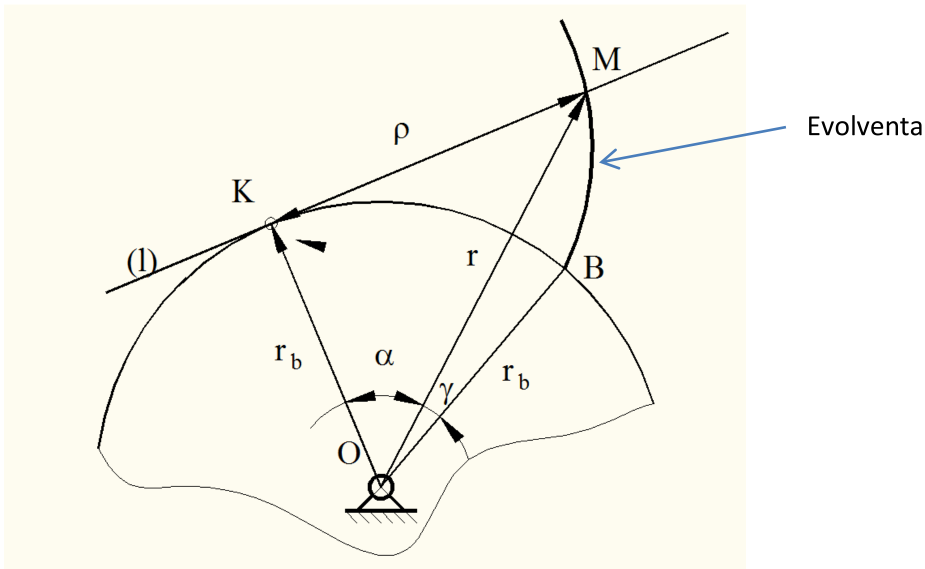



Fig. 8 Geometria trasarii unei evolvente

Pentru a determina coordonatele punctului M Є Evolventa se pot scrie urmatoarele relatii:

$\widehat{BK} = KM$ (dreapta l rostogolindu-se peste cerc produce egalitatea intre segment si arcul de cerc corespunzator)

$$\begin{aligned} \widehat{BK} &= r_b(\hat{\alpha} + \hat{\gamma}) \\ KM &= r_b \tan\hat{\alpha} \end{aligned} \quad \Rightarrow r_b(\hat{\alpha} + \hat{\gamma}) = r_b \tan\hat{\alpha} \quad \Rightarrow \hat{\alpha} + \hat{\gamma} = \tan\hat{\alpha}$$

Se defineste functia: $inv\alpha = \gamma = \tan\alpha - \alpha$ (citita ca involuta de alfa)

Deci pot obtine coordonatele punctului M de pe evolventa (intr-un sistem de coordonate polare):

$$\begin{aligned} r &= r_b / \cos\hat{\alpha} \\ \hat{\gamma} &= \tan\hat{\alpha} - \hat{\alpha} \end{aligned}$$

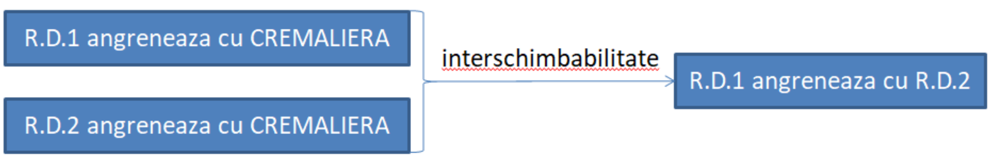
În cazul generării profilelor evolventice pentru roți dințate, dreapta este chiar **linia de angrenare**, iar cercul peste care se rostogolește este chiar **cercul de bază**.

### 5. Cremaliera de referinta

In aceasta sectiune se prezinta aspecte ce definesc cremaliera de referinta ca un pas intermediar in definirea geometriei rotilor dintate. Cu ajutorul cremalierei de referinta se vor defini ra – raza de cap, rf – raza de picior, r – raza de divizare, s – grosimea dintelui pe cercul de divizare si e – lungimea golului dintre dinti. Geometria cremalierei de referinta este standardizata prin STAS 821-82.

**Cremaliera** este o roata dintata a carei raza de divizare creste pana la infinit, situatie in care raza devine o dreapta. In aceasta situatie roata dintata se transforma intr-o bara dintata numita cremaliera.

Primele tehnologii de producere a unei roti dintate, cronologic aparute, s-au bazat pe utilizarea unor cremaliere scule aschietoare. Acestea erau capabile sa prelucreze prin aschiere o roata dintata dintr-un semifabricat. Daca o roata dintata este produsa de o cremaliera scula, roata dintata va putea sa angreneze cu o cremaliera cu un profil similar cu cremaliera scula. Daca roata dintata 1 era produsa pe cremaliera si putea sa intre in angrenare cu aceasta, si similar roata 2, folosind proprietatea de interschimbabilitate a rotilor dintate evolventice roata 1 va putea sa angreneze cu roata 2.




Ca urmare, toate rotile dintate prelucrate pe o cremaliera de referinta standardizata vor putea sa angreneze intre ele. Definim in continuare elementele caracteristice standardizate ale cremalierei de referinta – Fig. 9:

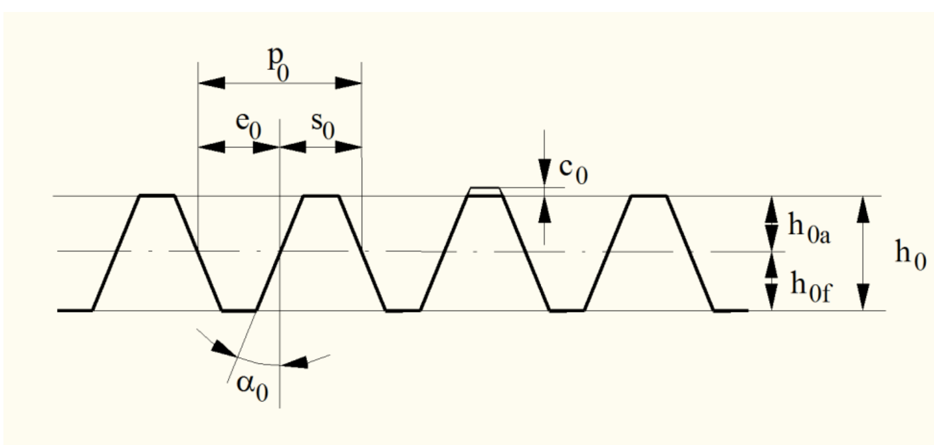



Fig. 9 Cremaliera de referinta standardizata

**Unghiul de angrenare** (sau **unghi de presiune**) $\alpha_0 = 20°$

**Pasul** $p_0 = \pi \cdot m$

**Lungimea golului dintre dinti** si **grosimea dintelui** $e_0 = s_0 = \dfrac{p_0}{2} = \dfrac{\pi \cdot m}{2}$

| | |
|---|---|
| **înălțimea capului dintelui** | $h_{0a}$ |
| **înălțimea piciorului dintelui** | $h_{0b}$ |
| **inaltimea dintelui** | $h$ |
| **coeficientul jocului de cap/picior** | $c_0$ |
| **raza de racordare la piciorul dintelui** | $\rho_0$ |

Pentru a defini acesti parametri se utilizeaza urmatoarele relatii. De notat este faptul ca toate depind de modulul m. Se pot identifica de asemenea coeficientii folositi in stabilirea geometriei cremalierei.

$$h_{0a} = h_{0a}^{*} \cdot m = 1 \cdot m$$
$$h_{0f} = h_{0f}^{*} \cdot m = 1{,}25 \cdot m$$
$$h_0 = h_{0a} + h_{0f} = 2{,}25 \cdot m$$
$$c_0 = c_0^{*} \cdot m = 0{,}25 \cdot m$$
$$\rho_0 = \rho_0^{*} \cdot m = 0{,}38 \cdot m$$

Datele mai sus enumerate definesc profilul cremalierei scula. Pe baza acestor date ale cremalierei de referinta se va face determinarea marimilor geometrice ale rotii dintate, considerand ca o roata dintata va angrena cu o cremaliera. Acest proces este prezentat in sectiunea urmatoare.

**Cremaliera de referinta. Determinare marimilor geometrice ale ROTILOR cu ajutorul cremalierei de referinta**

In aceasta sectiune se doreste determinarea geometriei unei roti prelucrate cu ajutorul unei cremaliere scula. Prin geometrie se face referire la raza de divizare si raza de baza.

Cercul de rostogolire (notat rw) al rotii dintate care angreneaza cu cremaliera de referinta poarta numele de cerc de divizare (notat r) sau cerc de rostogolire la prelucrare. Pe acest cerc se gasesc pasul p si unghiul de angrenare $\alpha_0$

Raza cercului de divizare a rotii dintate: $2 \cdot \pi \cdot r = z \cdot p = z \cdot \pi \cdot m \quad \Rightarrow r = \frac{z \cdot m}{2}$

Raza cercului de baza a rotii dintate: $r_b = r \cdot cos\,\alpha_0$

Folosind relatiile de mai sus, alegand un modul convenabil, se poate calcula raza de baza si divizare a rotii dintate.

Raza de divizare este o marime importanta pentru ca fata de aceasta se pozitioneaza cremaliera de referinta (mai exact linia de referinta a cremalierei) materializata ca scula aschietoare si aceasta poate da o geometrie diferita a dintelui. Daca exista deplasare, profilele obtinute poarta numele de **profile deplasate.**

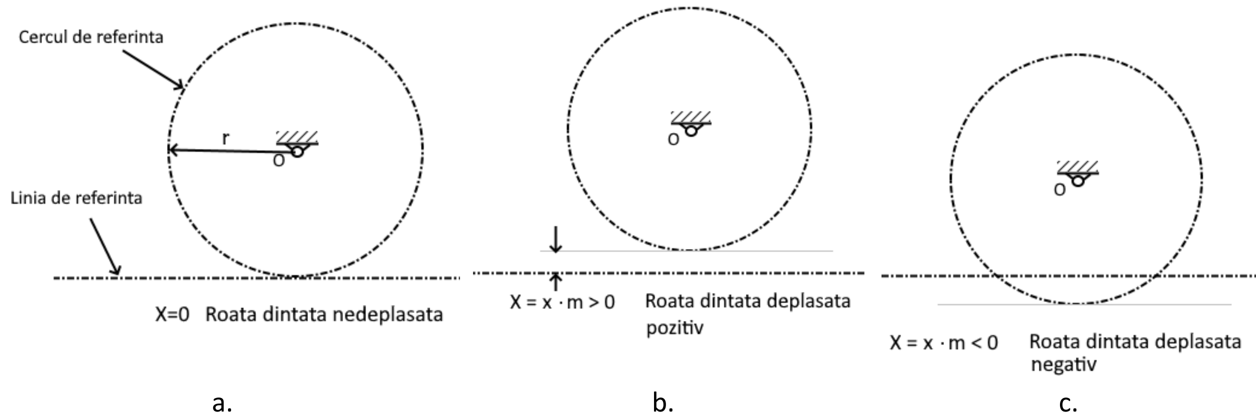



Fig. 10 Obtinerea profilelor deplasate

Danturile deplasate prezinta fata de cele nedeplasate modificari in geometria dintelui. In cazul danturii deplasate pozitiv inaltimea dintelui creste, se ingroasa la baza si se subtiaza la varf. La dantura deplasata negativ inaltimea dintelui scade, se ingroasa la varf si se subtiaza la baza

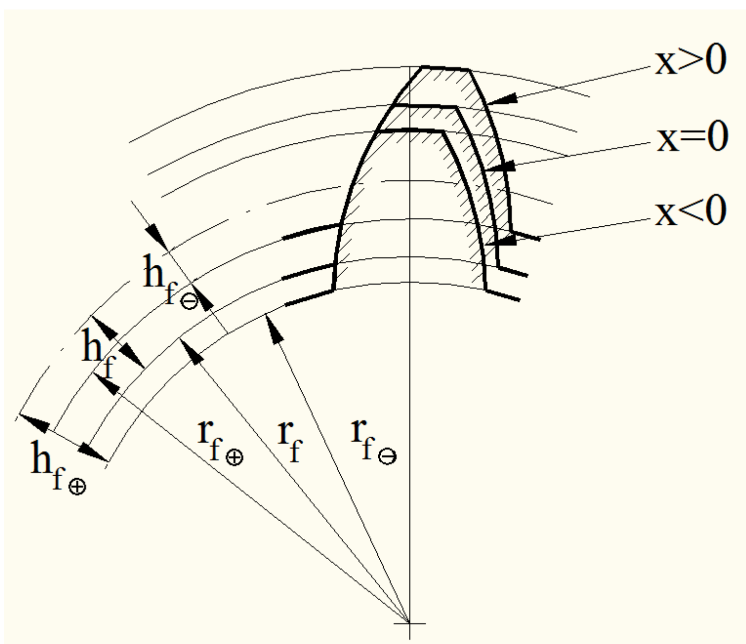



Fig. 11 Diferite forme de dinti obtinute prin deplasarea profilului cremalierei fata de cercul de divizare al rotii dintate

Ca principiu de proiectare, se recomanda utilizarea rotilor dintate cu dantura nedeplasata.

**Cremaliera de referinta. Definirea dimensiunilor principale ale unei DANTURI plane cu ajutorul unei cremaliere de referinta**

Consideram cazul in care o roata dintata angreneaza cu o cremaliera de referinta – Fig.12.

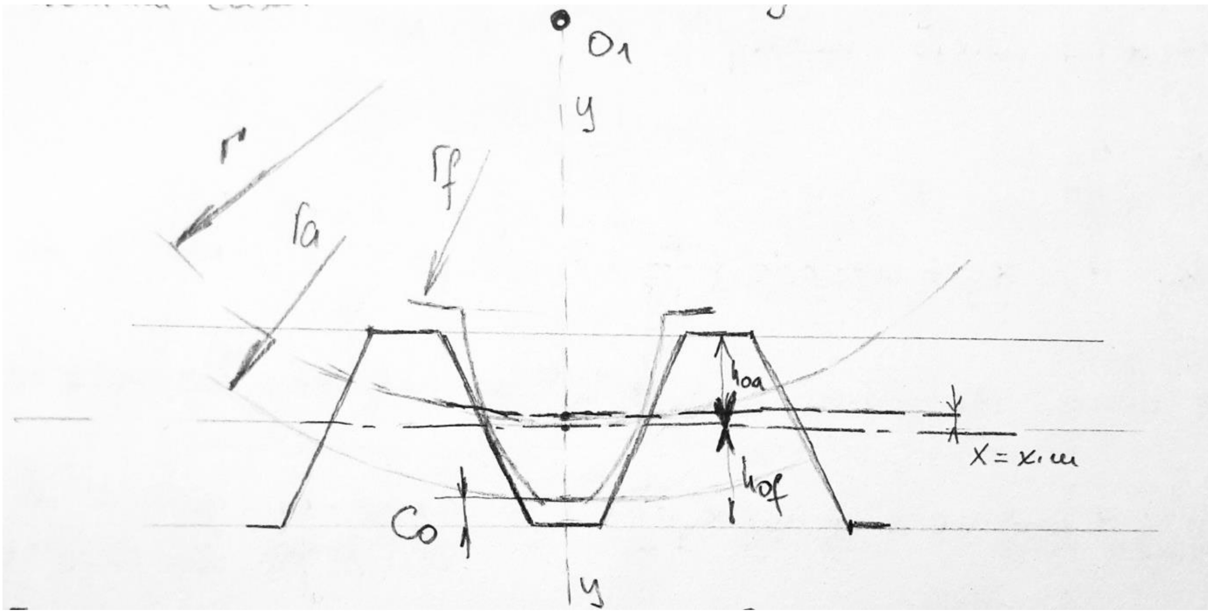



Fig. 12 Generarea profilului dintelui pe baza cremaliereii de referinta

Se considera directia y-y. Pe aceasta directie se pot scrie relatiile:

Raza de cap:

$$r_{a1} = r_1 + x_1 \cdot m + h_{0f} - c_0 = \frac{m \cdot z_1}{2} + x_1 \cdot m + 1{,}25 \cdot m - 0{,}25 \cdot m = m \cdot (\frac{z_1}{2} + x_1 + 1)$$

Raza de picior:

$$r_{f1} = r_1 - (h_{0a} - x_1 \cdot m) - c_0 = \frac{m \cdot z_1}{2} - m + x_1 \cdot m - 0{,}25 \cdot m = m \cdot (\frac{z_1}{2} + x_1 - 1{,}25)$$

**Geometria dintelui. Grosimea dintelui pe cercul de divizare**

Se doreste determinarea lui s1 (grosimea dintelui rotii pe cercul de divizare). In acest sens se poate utiliza Fig.13

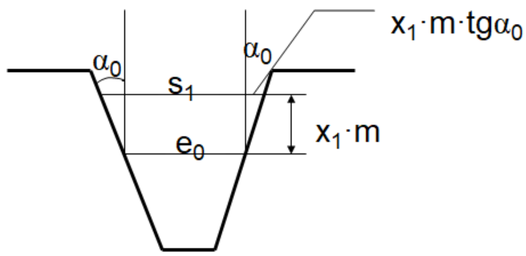



Fig. 13 Reprezentare schematica a unui dinte de cremaliera pentru determinarea grosimii dintelui rotii dintate

Din Fig.13 se poate exprima lungimea segmentului s1 folosind relatiile:

$$\begin{aligned} s_1 &= e_0 + 2 \cdot x_1 \cdot m \cdot tg\alpha_0 \\ e_0 &= \frac{p_0}{2} = \frac{m \cdot \pi}{2} \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad s_1 = \frac{m \cdot \pi}{2} + 2 \cdot x_1 \cdot m \cdot tg\alpha_0 = m \cdot (\frac{\pi}{2} + 2 \cdot x_1 \cdot tg\alpha_0)$$

Nota. $p_0$ este pasul cremalierei pe linia de referinta. $p_0 = s_0 + e_0$ si $s_0 = e_0$

Folosind relatiile pentru raza de cap si de picior mai sus enuntate, se pot scrie relatiile:

Inaltimea capului dintelui si inaltimea piciorului dintelui:

$$h_{a1} = r_{a1} - r_1 = m \cdot (\frac{z_1}{2} + x_1 + 1) - \frac{m \cdot z_1}{2} = m \cdot (x_1 + 1)$$

$$h_{f1} = r_1 - r_{f1} = \frac{m \cdot z_1}{2} - m \cdot (\frac{z_1}{2} + x_1 - 1{,}25) = m \cdot (1{,}25 - x_1)$$

respectiv, inaltimea dintelui

$$h = h_{a1} + h_{f1} = m \cdot (x_1 + 1) + m \cdot (1{,}25 - x_1) = 2{,}25 \cdot m$$

**Geometria dintelui. Grosimea dintelui pe un cerc oarecare**

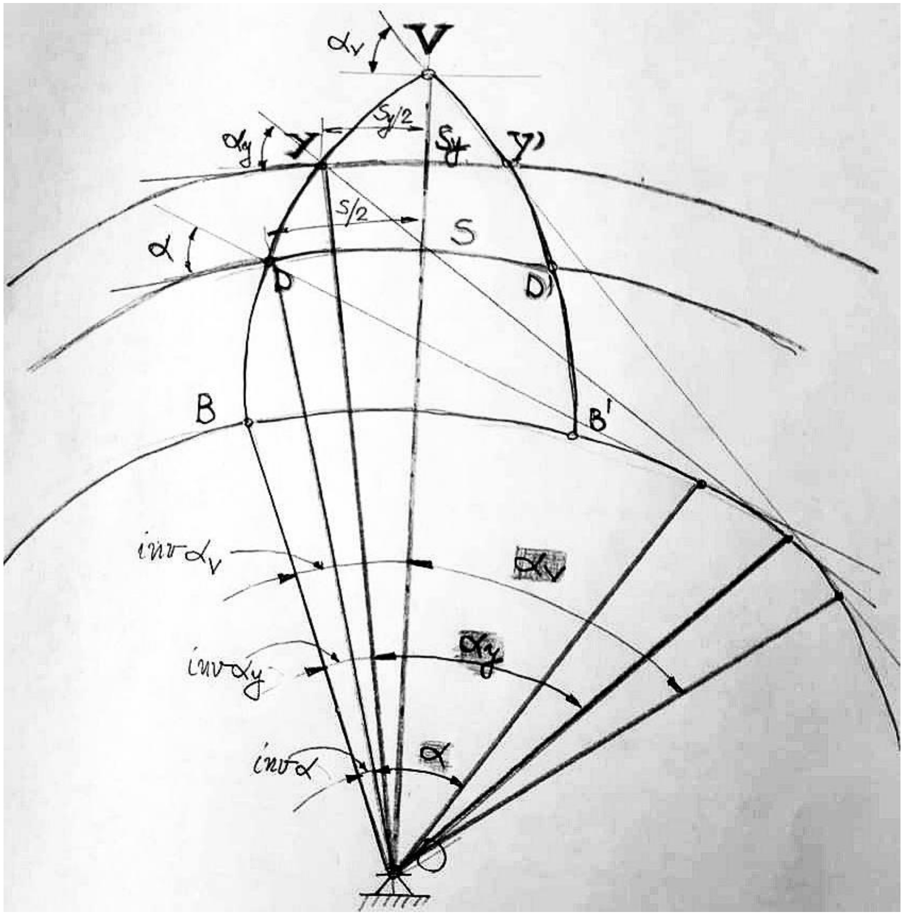



Fig. 14 Grosimea dintelui pe un cerc de raza oarecare

Se doreste determinarea grosimii dintelui pe un cerc oarecare y. In acest sens se tine cont de faptul ca profilul rotii este evolventic. Se exprima acelasi unghi (BOV) dupa cum urmeaza

$$\begin{matrix} BOV = BOD + DOV \\ BOV = BOY + YOV \end{matrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{matrix} inv\alpha_V = inv\alpha + \dfrac{\widehat{s}/2}{r} \\ inv\alpha_V = inv\alpha_y + \dfrac{\widehat{s}_y/2}{r} \end{matrix} \quad \Rightarrow$$

$$s_y = 2 \cdot r_y \left( \frac{s}{2 \cdot r} + inv\alpha - inv\alpha_y \right)$$

Stiind ca $s = m\left(\dfrac{\pi}{2} + 2 \cdot x_1 \cdot tg\alpha\right)$ $\quad \Rightarrow \quad$ $s_y = d_y\left(\dfrac{m \cdot \pi}{2 \cdot d} + inv\alpha - inv\alpha_y + \dfrac{2 \cdot x_1 \cdot m \cdot tg\alpha}{d}\right)$

tinand cont ca $d = m \cdot z$ se obtine

$$s_y = d_y\left[\frac{1}{z}\left(\frac{\pi}{2} + 2\cdot x_1 \cdot m \cdot tg\alpha\right) + inv\alpha - inv\alpha_y\right] \qquad \text{unde } \alpha = 20^\circ$$

pentru determinarea lui $\alpha_y$ se procedeaza in felul urmator:

$$r_b = r\cdot\cos\alpha = r_y\cos\alpha_y \qquad \Rightarrow \qquad \alpha_y = \arccos\left(\frac{r}{r_y}\cos\alpha\right)$$

$r$ fiind raza cercului de divizare a rotii dintate

Rezulta ca se poate determina si lungimea golului dintre dinti pe un cerc oarecare

$$e_y = d_y\left[\frac{1}{z}\left(\frac{\pi}{2} - 2\cdot x_1 \cdot m \cdot tg\alpha\right) - inv\alpha + inv\alpha_y\right]$$

## 6. Particularitati geometrice si cinematice ale ANGRENARII danturilor generale in evolventa

Subcapitol in care se doreste a arata modul de obtinere al ceficientilor de deplasare X.

Suma deplasarilor

Fie doua plane dintate (roti dintate) definite prin aceeasi cremaliera, avand acelasi modul “m”. Cele doua danturi se monteaza astfel incat grosimea dintelui pe cercul de rostogolire al uneia sa fie egala cu arcul golului dintre doi dinti al celeilalte roti.

Aceasta presupune joc de flanc nul. Matematic acest lucru se exprima astfel:

$$s_{w1} = e_{w2}$$

$$s_{w1} = mz_1[\frac{1}{z_1}\cdot(\frac{\pi}{2} + 2x_1 tg\alpha) + inv\alpha - inv\alpha_w]$$

$$e_{w2} = mz_2[\frac{1}{z_2}\cdot(\frac{\pi}{2} - 2x_2 tg\alpha) - inv\alpha + inv\alpha_w]$$

Egaland cele doua relatii si facand reducerile se obtine **suma deplasarilor**:

$$x_s = x_1 + x_2 = (z_1 + z_2)\cdot\frac{inv\alpha_w - inv\alpha}{2tg\alpha} \qquad \text{(A)}$$

unde $\alpha = 20^\circ$, iar $\alpha_w$ se poate calcula din relatia de calcul pentru $\alpha_y$

Distanta dintre axe:

Se noteaza $a_w$ - distanta dintre axe reala

$a_0$ - distanta dintre axe de referinta

Se pot scrie relatiile:

$$r_b = r_w \cdot \cos\alpha_w = r \cdot \cos\alpha$$

$$a_w = r_{w1} + r_{w2} = r_1 \frac{\cos\alpha}{\cos\alpha_w} + r_2 \frac{\cos\alpha}{\cos\alpha_w} = (r_1 + r_2)\frac{\cos\alpha}{\cos\alpha_w} \quad \Rightarrow$$

$$a_w = \frac{m}{2}(z_1 + z_2) \cdot \frac{\cos\alpha}{\cos\alpha_w}$$

dar $a_0 = \dfrac{m}{2}(z_1 + z_2)$ (in conditiile in care $\alpha = \alpha_w$) $\Rightarrow$

$$a_w = a_0 \cdot \frac{\cos\alpha}{\cos\alpha_w} \tag{B}$$

$a_0$ reprezinta distanta dintre axe cand $\alpha = \alpha_w$, adica cercurile de rostogolire si divizare sunt confundate

Variatia distantei dintre axe, se reprezinta printr-un coeficient y:

$$y \cdot m = a_w - a_0 = a_0 \cdot (\frac{\cos\alpha}{\cos\alpha_w} - 1)$$

$$y = \frac{z_s}{2}(\frac{\cos\alpha}{\cos\alpha_w} - 1)$$

Se poate defini si un coeficient specific al variatiei distantei dintre axe:

$$y_0 = \frac{y}{\frac{z_s}{2}} = \frac{\cos\alpha}{\cos\alpha_w} - 1 \tag{C}$$

$$a_w = a_0(1 + y_0)$$

Luand in considerare relatiile (A), (B) si (C) rezulta urmatoarele categorii de angrenaje:

a.) $x_1 = x_2 = 0 \Rightarrow \alpha_w = \alpha \Rightarrow a_w = a_0 \Rightarrow y_0 = 0$
numit angrenaj zero, nedeplasat

b.) $x_1 = -x_2 \Rightarrow \alpha_w = \alpha \Rightarrow a_w = a_0 \Rightarrow y_0 = 0$
numit angrenaj zero deplasat

c.) $x_1 \neq x_2 \Rightarrow \alpha_w \neq \alpha \Rightarrow a_w \neq a_0 \Rightarrow y_0 \neq 0$
$y_0 > 0 \Rightarrow a_w > a_0$ Angrenaj deplasat pozitiv (de preferat in proiectare
$y_0 < 0 \Rightarrow a_w < a_0$ Angrenaj deplasat negativ

## 7. Gradul de acoperire al unui angrenaj plan

Gradul de acoperire al unui angrenaj plan este folosit pentru a verifica daca angrenajul proiectat functioneaza corespunzator.

**Gradul de acoperire** reprezinta un indicator sintetic al asigurarii contactului (continuitatii) angrenarii.

Pentru a functiona, intr-un angrenaj trebuie sa existe minim o pereche de dinti in contact permanent, lucru ce asigura continuitatea angrenarii. De aici o prima concluzie, gradul de acoperire trebuie sa fie minim 1.

Gradul de acoperire arata numarul perechilor de dinti in angrenare. Daca gradul de acoperire este mai mare decat unitatea, inseamna ca atunci cand o pereche de dinti iese din angrenare, o alta pereche de dinti este deja in angrenare.

Pentru roti dintate cu dinti drepti, gradul de acoperire nu va depasi niciodata valoarea 2.

Pentru roti dintate cu dinti inclinati, gradul de acoperire poate fi mai mare de 2 ceeace constituie un mare avantaj al acestui tip de dantura (angrenare mai lina, zgomot redus, socuri mai mici, capacitate de transmitere a unor forte/cupluri mai mari).

Fractiunea cu care se depaseste unitatea reprezinta catimea dintr-un ciclu in care se gasesc cate doua (sau mai multe) perechi de dinti in angrenare.

**Prin definitie gradul de acoperire** (in sectiunea frontala) este raportul dintre segmentul de angrenare si pasul de baza.

Punctul de intrare in angrenare A se gaseste la intersectia dintre cercul de cap al rotii 2 si linia de angrenare. Punctul de iesire din angrenare E se gaseste la intersectia dintre cercul de cap al rotii 1 si linia de angrenare. **Angrenarea simpla** are loc pe segmentul BD iar **angrenarea dubla** pe portiunile AB si DE. Fig. 15. Segmentul AE se numeste **segment de angrenare**.

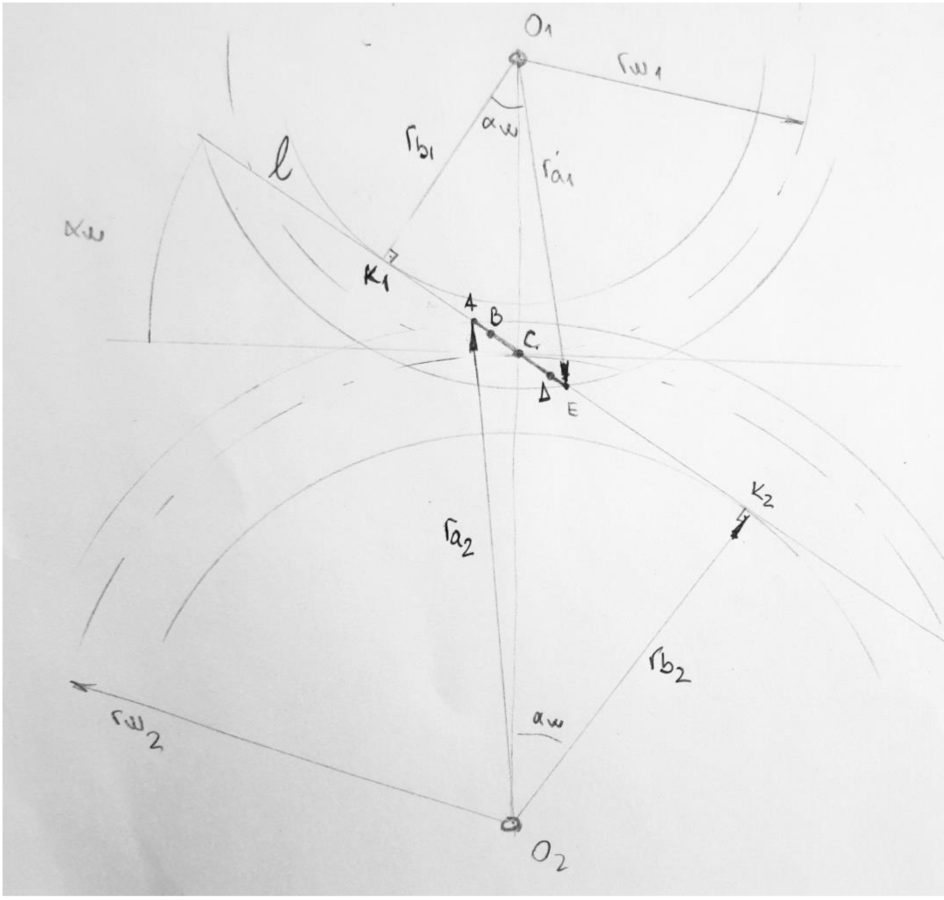



Fig. 15. Gradul de acoperire al unui angrenaj plan

Pozitionarea pe desen a segmentului BD se face simetric fata de polul angrenarii C. Pentru a determina lungimea segmentului BD, se calculeaza in prealabil pasul de baza.

Pentru notarea gradului de acoperire se utilizeaza simbolul $\varepsilon_\alpha$ . Acesta nu are unitate de masura.

Pornind de la relatia de definitie:

$$\varepsilon_\alpha = \frac{\overline{AE}}{p_b}$$

Se exprima segmental AE dupa cum urmeaza:

$$\overline{AE} = \overline{K_1E} - \overline{K_1C} + \overline{K_2A} - \overline{K_2C}$$

unde $\overline{K_1E} = \sqrt{r_{a1}^2 - r_{b1}^2}$ (aplicand Teorema lui Pitagora in $\Delta K_1O_1E$ )

$\overline{K_2A} = \sqrt{r_{a2}^2 - r_{b2}^2}$ (aplicand Teorema lui Pitagora in $\Delta K_2O_2A$ )

$$\overline{K_1C} = r_{w1} \cdot \sin\alpha_w \qquad \text{(din } \Delta K_1O_1C\text{)}$$

$$\overline{K_2C} = r_{w2} \cdot \sin\alpha_w \qquad \text{(din } \Delta K_2O_2C\text{)}$$

$$\overline{K_1C} + \overline{K_2C} = \overline{K_1K_2} = (r_{w1} + r_{w2}) \cdot \sin\alpha_w = a_w \cdot \sin\alpha_w$$

iar $p_b = \dfrac{2 \cdot \pi \cdot r_b}{z} = \dfrac{2 \cdot \pi \cdot m \cdot z \cdot \cos\alpha_0}{2 \cdot z} = \pi \cdot m \cdot \cos\alpha_0$

rezulta

$$\boldsymbol{\varepsilon_\alpha} = \frac{\sqrt{r_{a1}^2 - r_{b1}^2} + \sqrt{r_{a2}^2 - r_{b2}^2} - a_w \cdot \sin\boldsymbol{\alpha}_w}{\boldsymbol{\pi} \cdot m \cdot \cos\boldsymbol{\alpha}}$$

Pentru roti dintate cilindrice cu dinti drepti gradul de acoperire nu poate depasi valoarea 1,878.

Este indicat ca: $\varepsilon_\alpha \in (1{,}2 \div 1{,}878)$

**Interferenta si subtaierea**

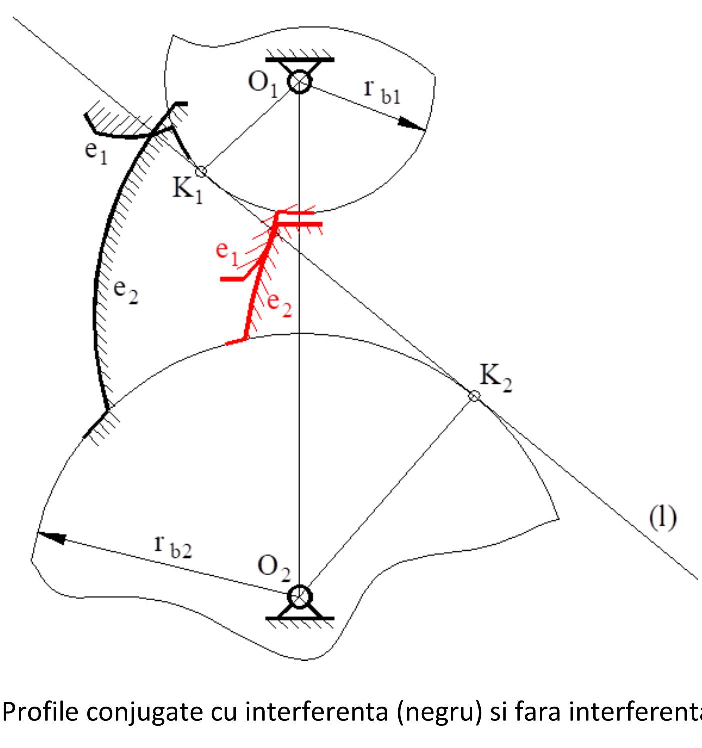



Fig. 16. Profile conjugate cu interferenta (negru) si fara interferenta (rosu)

Numarul de dinti pentru o roata dintata se allege astfel incat sa se evite fenomenul de interferenta si subtaiere.

**Interferenţa** profilelor reprezintă intersectarea acestora în anumite poziţii relative ale celor două roţi dinţate nematerializate încă. Dacă fenomenul se produce la prelucrarea profilelor, atunci apare aşa numita **subtăiere**, adică roata sculă taie flancul teoretic al semifabricatului.

Pericolul aparitiei fenomenului de interferenta creste odata cu scaderea numarului de dinti ai rotii conducatoare sau/si cresterea numarului de dinti ai rotii conduse. Rezulta astfel o limitare inferioara a numarului de dinti (un numar minim de dinti). Din literatura, relatia ce descrie numarul minim de dint este:

$$z_1 \geq \frac{h_{0a} - mx}{\frac{m}{2}\sin^2 \boldsymbol{\alpha}_0}$$

Daca $x = 0$, inlocuim $h_{0a} = 1 \cdot m$ rezulta

$$z_{\min} \geq 17$$

pentru prelucrarea pe o cremaliera scula de referinta si profil nedeplasat.

**Pasii in sinteza unui reductor in doua trepte cu roti dintate cilindrice**

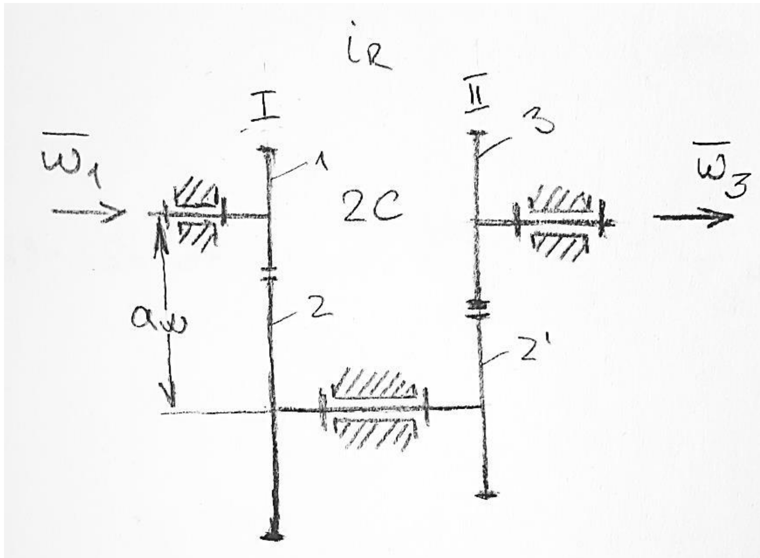



Fig. 17 Reductor tip 2C

**Tema de proiectare**:

Sa se proiecteze un reductor tip 2C (roti dintate cilindrice in 2 trepte) cunoscand $\omega_1$ - viteza unghiulara a motorului si necesarul de viteza unghiulara a elementului condus - $\omega_3$.

**Pasi in sinteza mecanismului:**

**Pasul I**. Se determina raportul de transmitere pe reductor: $$i_R = \frac{\omega_1}{\omega_3} = i_{12} \cdot i_{2'3}$$

$i_{12}$ - raport de transmitere pe treapta I

$i_{2'3}$ - raport de transmitere pe treapta II

Din STAS 6012-82 pentru rapoartele de transmitere **se aleg** valori pentru $i_{12}$ si $i_{2'3}$

Se recomanda ca:

1. $i_{12} > i_{2'3}$
2. $i_{12}$ cat mai aproape de $i_{2'3}$
3. Eroarea dintre valoarea dorita pentru $i_R$ si valoarea obtinuta pentru $i_R$ folosind valorile rapoartelor de transmitere standardizate sa fie mai mica de 3%

$$\varepsilon = \frac{|i_R - i_{R\_STAS}|}{i_R} \cdot 100 < 3\%$$

**Pasul II.** Pentru treapta I de transmitere ( $i_{12}$ fiind cunoscut din pasul anterior). (Se procedeaza in mod similar si pentru treapta II)

Se alege $z_1$ ; se recomanda ca $z_1$ ≥ 14 $\qquad i_{12} = \frac{z_2}{z_1}$

Se calculeaza $z_2 = INT(i_{12} \cdot z_1 + 0.5)$

**Pasul III – Varianta 1** – Daca se da modulul normal $m_n$

Modulul normal $m_n$ poate fi determinat astfel incat dintele rotii dintate sa respecte conditiile de Rezistenta, tinand cont de valorile standardizate pentru module STAS 822-82.

$$a_0 = \frac{m_n(z_1 + z_2)}{2\cos\beta}$$

$\beta$ = unghiul de inclinare al danturii (pentru cazuri de roti dintate cu dinti inclinati)

se recomanda 10 < $\beta$ < 25

Din STAS 6055-82 se alege $a_w$ astfel incat $a_w > a_0$ pentru a obtine deplasari de profil pozitive

$a_w$ - distanta dintre axe reala(standardizata); $a_0$ - distanta dintre axe de referinta

**Pasul III – Varianta 2** – Daca se da distanta dintre axe $a_w$

Se determina $m_{n\_calculat}$ din relatia: $a_w = \frac{m_{n\_calculat}(z_1 + z_2)}{2\cos\beta}$ => $m_{n\_calculat} = \frac{2a_w \cos\beta}{(z_1 + z_2)}$

Valoarea lui $m_{n\_calculat}$ este standardizata obtinand $m_{n\_STAS}$. Se recomanda ca $m_{n\_STAS} < m_{n\_calculat}$

Se calculeaza $a_0 = \frac{m_{n\_STAS}(z_1 + z_2)}{2\cos\beta}$. Se observa ca si in acest caz $a_w > a_0$

**Pasul IV. Verificare.**

Se calculeaza $\alpha_{tw}$ - unghiul de presiune/angrenare in plan frontal pe cercul de rostogolire.

Se recomanda ca $\qquad \alpha_{tw} = \arccos\left(\frac{a_0}{a_w}\cos\alpha_t\right) \le 24^0$

$$\alpha_t = arctg\left(\frac{tg\alpha_n}{\cos\beta}\right) \qquad \alpha_n = 20^0$$

pentru a elimina ascutirea dintilor, grad de acoperire acoperitor, nu apare interferenta, deplasari de profil pozitive

Daca apar depasiri

1. Reglare grosolana: aleg alt $z_1$ iar procesul se reia de la **Pasul I**
2. Reglare fina: aleg alta valoare pentru $\beta$

**Pasul V.**

Se calculeaz suma deplasarilor, dupa care se determina deplasarile de profil pentru fiecare roata dintata

$$x_s = x_1 + x_2$$

Determinarea dimensiunilor geometrice ale rotilor si dintilor rotilor dintate fiind cunoscute m, z, a, x1, x2

Odata cu parcurgerea Pasului V, procesul de sinteza este **finalizat** pentru o treapta de angrenare.

ANEXA 1. Construcția Reuleaux pentru profile conjugate

Cunoscând profilul dintelui unei roți (de exemplu $c_2$; in sectiunea corespunzatoare constructiei profilelor conjugate s-a utilizat p pentru a nota profilul) și razele cercurilor de rostogolire pentru cele două roți, se pune problema determinării profilului conjugat $c_1$ cu transmiterea mișcării prin intermediul acestor profile respectand legea angrenării.

Fie $M_2 \in c_2 \in 2$, un punct care parcurge profilul $c_2$ (numit punct curent – „curge”). Normala la $c_2$ în acest punct este $M_2 m_2$ ($m_2$ este obtinut prin intersectia normalei $c_2$ cu cercul de rostogolire 2) care netrecând prin polul angrenării C conduce la concluzia că $M_2$ nu este punct de contact cu elementul 1. $M_2$ devine punct de contact în momentul în care $m_2$ ajunge peste punctul C printr-o miscare de rotatie. În această situație, $M_2$ împreună cu $M_1$ (necunoscut încă) au ajuns în punctul $M$, iar $MC = M_2 m_2$ reprezintă normala comună la cele două profile.

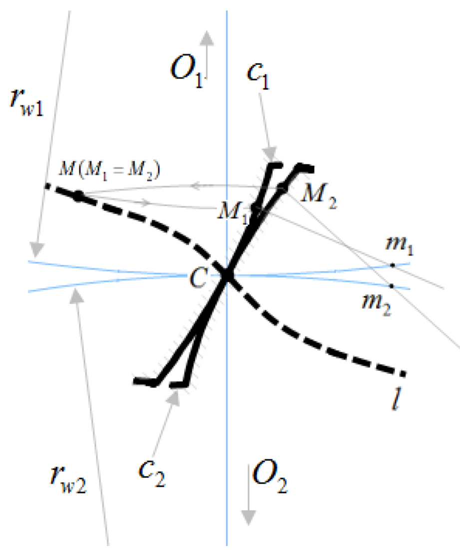



Fig.5 Construcția profilului conjugat $c_1$ pentru un profil dat $c_2$

Pentru a găsi poziția lui $M_1 \in c_1 \in 1$ în momentul inițial, se revine la această poziție dând o mișcare de rotație inversă ambelor roți. $M_1$ se va găsi pe arcul de cerc de rază $O_1M$ la distanța $MC = M_1m_1 = M_2m_2$ de punctul $m_1$ de pe cercul de rostogolire 1 cu condiția evidentă a rostogolirii pure, arcurile $Cm_2 = Cm_1$.

Prin această construcție se poate determina pas cu pas profilul $c_1$.

Dacă punctul curent $M_2$ parcurge profilul $c_2$, punctul $M_1$ generează profilul $c_1$ atunci punctul de contact $M$ va descrie în planul fix o curbă $l$ numită **linie de angrenare**. Rezultă deci că linia de angrenare este locul geometric al punctelor de contact în planul fix.

Algoritmul Reuleaux pentru obtinerea profilului conjugat

Date de pornire:

| | |
|---|---|
| Se cunoaste | profilul dintelui roţii 2, (c2); |
| | razele cercurilor de rostogolire ale roţilor (rw1, rw2) |
| Se cere: | profilul dintelui roţii conjugate (c1) |

Etape:

- se alege un punct M2 pe profilul c2
- se construieşte normala $M_2m_2$ la profilul (c2) în punctul M2
- normala intersectează cercul C(O2,rw2) în punctul m2
- $M_2m_2$ nu trece prin polul angrenării
- In consecinta punctul M2 nu este punct de contact
- se roteşte profilul c2 cu viteza unghiulară ω2, până când m2 devine identic cu polul angrenării C
- Punctul M2 ajunge în poziţia M
- în polul angrenării C coincid punctele m1=m2 când M=M1=M2
- considerând mişcarea inversă cu viteza unghiulară ω1 şi condiţia Cm1=Cm2 si M2m2=M1m1, punctul M1 se va găsi pe profilul dintelui conjugat (c1)

SFARSIT ANEXA 1

ANEXA 2. Constructia profilelor conjugate (cicloidale)

Pentru cazul general, problema generării profilelor conjugate se poate pune și invers, adică: dându-se linia de angrenare, legea de mișcare a punctului de contact M (viteza lui M) și starea de mișcare a celor două roți, să rezulte cele două profile conjugate $c_1$ și $c_2$ ca locuri geometrice ale punctului M în planele roților 1 și 2 Fig. A2.1

Procesul poate fi imaginat în felul următor, se consideră planele roților ca două foi de tablă cu mișcare identică cu cea a roților 1 și 2, iar în planul fix , pe linia de angrenare se deplasează un punct laser M cu viteză prescrisă. În deplasarea lor relativă, punctul M va tăia în tablă 2ouă rpofile identice cu profilele conjugate $c_1$ și $c_2$ .

Dacă se alege linia de angrenare în mod convenabil se pot genera profile având configurații geometrice favorabile din mai multe puncte de vedere: manufacturare ușoară, interschimbabilitate, influență a variației distanței dintre axe, variația forței de angrenare, solicitare la contact, tehnologie de execuție.

Din aceste puncte de vedere se disting două tipuri de profile

- profile cicloidale – Fig.5
- profile evolventice

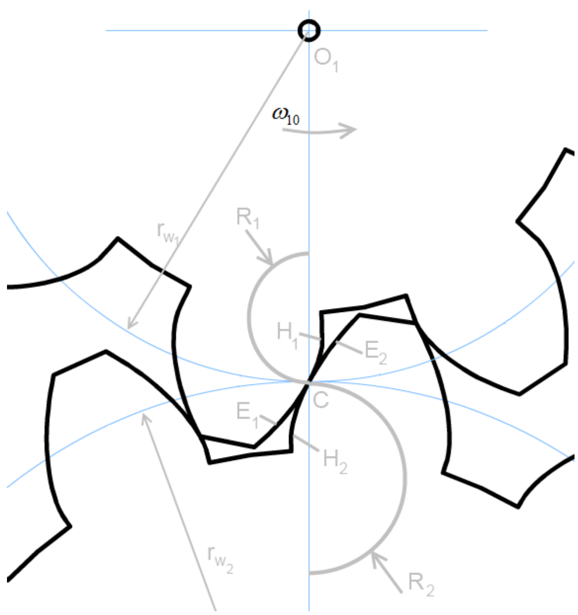



Fig.A2.1 Linie de angrenare compusă din arce de cerc, profile cicloidale pentru dantura

Pentru a obține **profile cicloidale** la dinții roților dințate, **linia de angrenare se alege compusă din 2 arce de cerc de rază $R_1$ și $R_2$** tangente în punctul C și tangente tot în C la cercul de rostogolire. Punctul C va descrie prin rostogolire peste cercul $w_1$ hipocicloida $H_1$, iar prin rostogolirea peste $w_2$ epicicloida $E_2$. Conform celor prezentate mai sus, acestea sunt curbe conjugate reprezentând piciorul dintelui roții 1 ( $H_1$ ), respectiv capul dintelui roții 2 ( $E_2$ ). Raționând similar pentru porțiunea de rază $R_2$ a liniei de angrenare rezultă profilele conjugate formate din epicicloida $E_1$ și hipocicloida $H_2$. Fiecare dinte va avea profilul capului format dintr-o porțiune de epicicloidă și profilul piciorului dintr-o porțiune de hipocicloidă.

Profilele celor doi dinți vor fi atunci:

$$p_1 = E_1 + H_1 \quad \text{și} \quad p_2 = E_2 + H_2$$

(http://en.wikipedia.org/wiki/Hypocycloid ; http://en.wikipedia.org/wiki/Epicycloid)